La creación
del álgebra abstracta

Noether

$$I \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_k = (1) = \mathbb{Z}$$

GENIOS
de las
MATEMÁTICAS

La creación
del álgebra abstracta

Noether

RBA

© 2017, Antonio Jesús López Moreno por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Joan Pejoan
Fotografías: Album: 139 ad; Archivo RBA: 25, 30, 41, 64, 67i, 67d, 77a, 139 ai, 140, 143, 145; Natascha Artin: 129a; Bundesarchiv: 139b; Bundesarchiv/P. Loescher y Petsch: 41ad; Jürg-Peter Hug: 131; Konrad Jacobs: 102; Janericloebe: 18; 123rtf: 41, 77b, 129b.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9068-7
Depósito legal: B 19461-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 Una mujer entre dos mundos 15

CAPÍTULO 2 De la «cacería de invariantes» al sueño de Gotinga 53

CAPÍTULO 3 Los anillos «noetherianos» y el método que revolucionó el álgebra 97

CAPÍTULO 4 Un adiós en la cumbre de las matemáticas 133

LECTURAS RECOMENDADAS 153

ÍNDICE 155

Introducción

En una sociedad como la actual, dominada por las prisas, la vida y obra de Emmy Noether podría resumirse de la siguiente manera: «Mujer judeoalemana. Vivió en Alemania desde finales del siglo XIX hasta los albores de la Segunda Guerra Mundial. Fue un genio de las matemáticas. Falleció en Estados Unidos». No obstante, se trataría de una simplificación exagerada. La existencia de cualquier persona está salpicada, en mayor o menor grado, de hechos decisivos, por lo que cabría preguntarse cuáles fueron en concreto los que vivió Emmy Noether y, sobre todo, en qué consistieron sus aportaciones matemáticas, dado que esa definición escueta afirma que fue un genio. También surge, de inmediato, otra duda: ¿cómo pudo una mujer de finales del siglo XIX adentrarse en un campo científico absolutamente masculino? En definitiva, la pregunta clave es... ¿quién fue Emmy Noether?

Este último interrogante resulta muy ilustrativo, porque la inmensa mayoría de las personas nunca ha oído mencionar su nombre, ni siquiera una vez. No obstante, debe señalarse que si contestaran que Emmy Noether es la denominación alemana de algún producto químico, la responsabilidad no sería del todo suya, sino del eclipse histórico al que se ha sometido tradicionalmente al género femenino; y en particular, a la discriminación que padeció Emmy Noether, que tantos años se vio forzada a ejercer como profesora bajo una titulación humillante y sin cobrar nada.

De la misma manera que no resulta fácil explicar una vida o una obra, tampoco lo es llegar a la propia Emmy Noether. Incluso aquellos que pretenden convertirse en matemáticos tardan mucho tiempo en saber quién era. Solamente después de dos o tres años en la facultad, una vez curtidos en el duelo contra polinomios, vectores y funciones, de pronto escucharán un día cualquiera al catedrático de turno proferir ese apellido: Noether. Probablemente lo hará con la misma indisimulada falta de afán con la que se trata a otros grandes «desconocidos», como Évariste Galois (1811-1832), Daniel Bernoulli (1700-1782) o Felix Hausdorff (1868-1942), que después se anuncian como si todo el mundo supiera quiénes fueron y qué dorado ladrillo colocaron en el prodigioso edificio de la ciencia exacta.

Esa displicencia es solo aparente, ya que desde el mismo momento que los estudiantes de matemáticas oyen un nombre que ha sido prestado a un teorema o algún espacio abstracto, se obra una especie de milagro: de repente, ese nombre se transforma en sus mentes en un titán mitológico digno de reverencia, casi adoración. Sin embargo, por lo general no conocerán más que eso, un nombre. De esta manera, entablarán una extraña relación diaria con los teoremas, definiciones y resultados de alguien a quien, a cambio, rendirán culto científico, aun sin tener la más mínima noticia de su vida... A ese olimpo etéreo pertenece Emmy Noether.

Si además el catedrático de turno, entre cálculo y cálculo y mientras expone la condición de cadena ascendente, inserta una pincelada de humanidad y emite una frase inesperada, «la señora Noether», para la mayoría de los estudiantes se tratará de una noticia asombrosa: «¡Noether era una mujer!». Sin embargo, el eco de su apellido, como los de Banach (1892-1945), Riemann (1826-1866) y Lie (1842-1899), que tantas veces habrán escuchado en esas mismas aulas, debería hacerles reflexionar que detrás de cada apellido siempre hay un hombre o una mujer. Y desde luego, no detenerse ahí: averiguar si fue una persona que vivió muchos o pocos años, en qué contexto nació, creció y se formó, si su obra fue escasa o extensa, si sufrió la guerra o no, si participó del amor o del odio y, sobre todo, qué hitos matemáticos consiguió y qué legado dejó. Eso es exactamente una biografía, el hecho de no conformarse con un mero nombre, ni con las tres líneas que contenga una definición apresurada. Ir más allá. Saberlo todo.

Es normal en la evolución de alguien que se dedica a las matemáticas adquirir, pasados ya unos años, pasión por la historia y las biografías de aquellos cuyos resultados, algoritmos y razonamientos tantas veces ha seguido, extendido y aplicado. Puede entenderse esto como el pago aplazado de una deuda contraída en la juventud que en la madurez lleva a la búsqueda de las personas que dieron vida, al otro lado de esas ecuaciones, a las matemáticas que uno estudió. En este libro se pretende realizar un ejercicio de economía que permita al lector ahorrarse esos años intermedios, reconciliando un apellido bajo el que se esconde una obra y que bautiza teoremas o anillos con una persona real. Sus páginas, por tanto, se rebelan contra esta fatídica inercia y darán respuesta, de forma detallada y amena, a todas las preguntas y cuestiones que se han formulado hasta aquí. Además, se aportarán algunas revelaciones sorprendentes, incluso para aquellos lectores que sí sepan quién era Emmy Noether, cómo fue su vida y qué valor tuvo su obra; que, por otra parte, mereció los elogios de Albert Einstein y otras grandes personalidades científicas de su tiempo.

La biografía se divide en cuatro capítulos que pretenden ofrecer una exposición ordenada y lineal de los acontecimientos vitales y hallazgos matemáticos que conformaron la trayectoria de Emmy Noether. El primero de ellos dibuja su feliz infancia en el seno de una familia judía que se abrió paso en una Alemania más justa y tolerante que nunca, así como el inspirador panorama matemático que la rodeó.

A continuación, el segundo capítulo recorre su formación universitaria, marcada por la discriminación femenina, la dependencia de su director de tesis y el estudio obsesivo de la teoría de invariantes, que culminó con su incorporación a la Universidad de Gotinga. Allí trabajó a la estela de dos de los más grandes matemáticos alemanes de todos los tiempos: David Hilbert (1862-1943) y Felix Klein (1849-1925). En aquel epicentro mundial del saber, Emmy Noether se sintió, ni más ni menos, en un paraíso matemático, y demostró su primer gran teorema, que no en vano recibe el nombre de «teorema de Noether».

Por su parte, el tercer capítulo muestra el gran salto de su vida: el que la llevó de ser una joven e infravalorada profesora a una eminencia que agrupó a su alrededor a un grupo brillante de matemáticos —los «chicos Noether»— y terminó convirtiéndose en la referencia y cabeza internacional de toda una disciplina, el álgebra. Asimismo, se traza un esbozo de lo que son los «anillos noetherianos» y del revolucionario método axiomático que ideó Emmy Noether, y que tanto influyó en la matemática posterior.

Finalmente, el último capítulo muestra cómo el totalitarismo nazi cambió el semblante de Alemania y forzó su exilio y el de otros miles de judíos y represaliados: los más afortunados, como ella, pusieron rumbo a Estados Unidos; otros, como su querido hermano Fritz, se decantaron por la Unión Soviética. El libro termina con la actividad de Emmy Noether en tierras americanas, el peso de su valioso legado matemático y una breve semblanza de las facetas más destacadas de su personalidad.

Emmy Noether reúne de sobras los requisitos para tener su propio pedestal en la historia de la matemática, y no solo porque a su nombre respondan un teorema y objetos matemáticos tan notables como los «anillos noetherianos». Estos hitos en su carrera ya están reflejados en los libros y tratados, y se explican año tras año, desde hace ya casi un siglo, en las lecciones magistrales de los grados en matemáticas o física de las universidades de todo el mundo. La cuestión es que hay mucho más: de forma sutil, su legado impregna de un modo u otro la manera en que hoy se escribe matemáticas. Desde la rama concreta en la que se inscribió la parte más importante de su trabajo, el álgebra, Emmy Noether creó un lenguaje y unos modos que se extendieron luego a la geometría, el análisis y a todo el lenguaje matemático en general. Su método axiomático abstracto modificó de forma profunda las matemáticas del siglo XIX para, a lo largo del siglo XX, darles la apariencia con que se contemplan hoy en día.

Cualquier estudiante aprende que los números se pueden sumar y multiplicar y, más adelante, que también puede hacerse lo propio con polinomios o matrices. Asimismo, al ascender en las etapas educativas comprobará que hay multitud de objetos matemáticos de diversa índole para los que también hay disponibles una

suma y un producto. El enfoque de Noether pasó por resumir esta plétora de situaciones en lo que se denomina una «estructura algebraica». Un teorema en este nuevo esquema no hablará de números, ni polinomios, ni matrices, y lucirá más bien del siguiente modo: «Sea un conjunto A en el que se tienen dos operaciones + y ×, entonces…». Dicho conjunto, con sus operaciones, forma una estructura algebraica de la que ya no interesa la naturaleza de sus elementos, sino tan solo las propiedades que se establecen entre ellos y las operaciones. Según sean estas, se tendrá grupos, cuerpos, módulos, ideales, espacios vectoriales o anillos, todos ellos estructuras algebraicas que quizá resulten familiares a quienes las estudiaron en lo que dio en llamarse «matemática moderna».

El principal punto de partida de esa matemática fue, sin duda, Emmy Noether. De sus manos, la estructura algebraica paradigmática, el anillo, encontró por primera vez la formulación que se usa en la actualidad. El concepto de anillo resume, preside y gobierna infinidad de casos particulares que son clave en teoría de números, resolución de ecuaciones y geometría. El impacto que el estudio y uso sistemático de las estructuras algebraicas supuso en la matemática fue radical. El momento fue el propicio, ya que a finales del XIX y principios del siglo XX la comunidad matemática vivió la efervescencia, científica por supuesto, que supuso el descubrimiento de las profundas conexiones entre muchas de las disciplinas clásicas y la teoría de grupos, en sendos procesos que de forma muy expresiva se conocen como la «algebrización» de la geometría, de la topología y del análisis.

Este «calentamiento» teórico devino en la descongelación de una disciplina; el álgebra, que terminó inundando al resto. El desembarco de Noether al mando de los algebristas fue tan inevitable como necesario: alguien debía poner orden en los perfiles de costa que dibujaba el nuevo paisaje. De esta forma, se erigió en la maestra al mando del equipo que desarrolló las nuevas técnicas.

En muchos sentidos, Emmy Noether no fue una persona corriente. Cabe, desde luego, preguntarse si podía haberlo sido una mujer judía en la Alemania del período de entreguerras que decide embarcarse en una carrera universitaria vetada a las mujeres. Sin embargo, en esta empresa contó con el respaldo incondicional de

sus padres, de varios mentores excepcionales —entre los que sobresalieron Hilbert y Klein— y, más adelante, de un grupo incondicional de alumnos muy capaces y dotados de talento. Fue, además, pionera en todo: una de las primeras mujeres en cursar estudios universitarios en Alemania, una de las primeras que consiguió ser profesora y, sobre todo, la primera invitada a pronunciar una conferencia plenaria en un Congreso Internacional de Matemáticas. Sin embargo, todos estos éxitos, así como las dificultades que tuvo que vencer, no fueron para ella más que cuestiones secundarias. Lo primordial, casi lo único que le merecía atención, fueron las matemáticas: pensar en matemáticas, «charlar» matemáticas —como ella misma decía— y hacer matemáticas.

Emmy Noether no solo fue, como afirmaron todos los que la conocieron, una persona valiente, feliz, generosa y capaz de la amistad más leal, además de una excelente profesora e investigadora: como sostuvo Norbert Wiener (1894-1964), padre de la cibernética, fue también «uno de los diez o doce matemáticos más importantes de esta generación en todo el mundo». Wiener, además, añadió una sentencia tan precisa como lapidaria: que se trató de «la más grande mujer matemática que ha vivido jamás».

1882 Nace Amalie Emmy Noether en la ciudad alemana de Erlangen, primogénita del matrimonio formado por Max Noether e Ida Amalia Kaufmann.

1889-1897 Estudia en la escuela municipal de educación superior de niñas, en su ciudad natal.

1900 Obtiene en Ansbach el título para impartir clases de lenguas modernas.

1900-1902 Asiste como oyente a la Universidad de Erlangen-Núremberg.

1903 Supera los exámenes de graduación que dan acceso oficial a la universidad. Asiste como oyente a la Universidad de Gotinga.

1904 Ingresa como alumna oficial en la Universidad de Erlangen-Núremberg.

1907 Obtiene el doctorado en Matemáticas con una tesis sobre teoría de invariantes.

1915 Acepta la invitación de David Hilbert y Felix Klein para trabajar como profesora sustituta en Gotinga.

1918 Aprueba su tesis de habilitación, que incluye el teorema de Noether sobre leyes de conservación.

1919 Imparte su primer curso oficial como profesora, sin sueldo alguno.

1922 Recibe el nombramiento de profesora permanente, aunque sin salario.

1920-1926 Publica su primer gran artículo sobre módulos y teoría general de ideales en anillos. Sus trabajos en esta etapa revolucionan el álgebra

1923 Es contratada como parte de la plantilla de la Universidad de Gotinga para impartir cursos de álgebra.

1932 Recibe junto a su colega Emil Artin el premio Alfred Ackermann-Teubner. Imparte una conferencia plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticas, en Zúrich, y se consagra como una gran figura mundial de esta ciencia.

1933 Ascenso del nazismo. Se le retira su acreditación como profesora y se exilia a Estados Unidos, donde ocupa una plaza de profesora invitada en el Bryn Mawr College, en Pensilvania.

1933-1935 Centra su atención en el estudio de anillos no conmutativos y trabaja intensamente los conjuntos de números hipercomplejos.

1934 Comienza a impartir una serie de cursos en el recién creado Instituto de Estudios Avanzados, en Princeton. Viaja por última vez a Alemania.

1935 Fallece el 14 de abril en Bryn Mawr, a los cincuenta y tres años de edad, por complicaciones postoperatorias.

CAPÍTULO 1

Una mujer entre dos mundos

Emmy Noether nació en una época en la que las perspectivas para una mujer, aunque fuera muy inteligente y dotada para las matemáticas, se circunscribían al hogar, la familia y, como máximo, a ejercer como profesora en centros muy determinados. Sin embargo, se adentró con valentía en un ámbito reservado para los hombres: la universidad. De allí salió triunfante, a caballo entre la matemática tradicional aprendida en su Erlangen natal y los nuevos caminos trazados en Gotinga.

Emmy Noether nació el 23 de marzo de 1882 en Erlangen, una pequeña ciudad alemana emplazada a escasos kilómetros al norte de Núremberg. Su casa, de la que despunta un magnífico mirador de madera tallada, aún se alza orgullosa en el número 23 de la Hauptstrasse, en pleno centro. Allí, una modesta placa de mármol junto a la entrada de piedra recuerda a una mujer valiente y brillante que, por derecho propio, figura en el olimpo de los genios matemáticos. Por cuestiones de extensión, la placa no describe cómo su infancia y juventud transcurrieron felices en Erlangen hasta que en 1914 soplaron vientos de guerra en Europa y tantos sueños fueron barridos; vientos que, posteriormente, volverían en forma de tempestades y arrastrarían consigo vidas, ciudades y fronteras. Tampoco narra cómo se abrió paso en un mundo eminentemente masculino, ni cómo era ella en realidad, ni cuál fue el legado matemático que dejó.

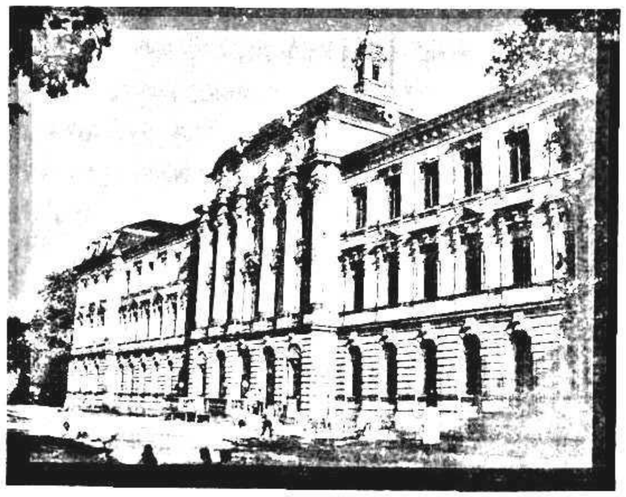
Cuando Emmy Noether vino al mundo, su cuna natal, Erlangen, apenas contaba 15 000 habitantes, frente a los cerca de 110 000 de la ciudad imperial de Núremberg. La vida cotidiana de la pequeña villa giraba alrededor de este histórico centro comercial, político e industrial, que además se erigió en un destacado foco de desarrollo científico, matemático y tecnológico. El segundo polo sobre el que giraba Erlangen fue un regalo inesperado para la ciudad: la Universidad Friedrich-Alexander de Erlangen-Núremberg, un centro aca-

démico que inició su andadura el 4 de noviembre de 1743 con solo cuatro facultades, 16 profesores y 64 estudiantes. Por esta razón, su impacto inicial fue reducido y sufrió dificultades financieras de forma crónica. De hecho, probablemente habría desaparecido de no tener la única facultad de teología protestante de Baviera.

La universidad remontó el vuelo a lo largo del siglo XIX gracias a una serie de donaciones que permitieron aumentar su oferta académica y, con ella, el número de estudiantes admitidos. Hacia 1890, la institución ya reunía a unos 1 000 estudiantes y desempeñaba un papel esencial en la vida de Erlangen. Así, Emmy Noether creció en una localidad plenamente universitaria, en la que una de cada diez personas aprendía, enseñaba o trabajaba de un modo u otro en la institución.

SE ACABARON LAS PELEAS: LA UNIVERSIDAD DE ERLANGEN

La Universidad Friedrich-Alexander de Erlangen-Núremberg, inaugurada en 1743, no tenía como destino original la localidad de Erlangen, ya que había sido fundada un año antes bajo el nombre de Academia Fridericiana y en otro emplazamiento mucho más rico: Bayreuth, a 70 kilómetros al norte de Erlangen. Sin embargo, esta ciudad resultó ser demasiado aristocrática y violenta para acoger aquella institución. Las propiedades de Bayreuth estaban acaparadas por decenas de nobles que se hacían acompañar de centenares de sirvientes y apenas quedaba alojamiento para los estudiantes; estos, además, provocaban continuos altercados callejeros con los soldados. Por ello, se decidió trasladar la universidad a un lugar más tranquilo, lejos de los tumultos y escándalos que sufría Bayreuth. La elección de la sede recayó en la pequeña y modesta Erlangen, donde la buena nueva fue acogida con júbilo. Bayreuth, por su parte, se «conformaría» a finales del siglo siguiente con quedar asociada para siempre a las óperas de Richard Wagner.



Universidad Friedrich-Alexander de Erlangen-Núremberg.

BISMARCK ALUMBRA UN PODEROSO IMPERIO

Erlangen, y toda la región de Franconia en la que se inscribe, había cambiado varias veces de nacionalidad a lo largo de los últimos cien años; y todo ello, sin moverse de su enclave ni un solo milímetro. Perteneciente al primer Imperio alemán —I Reich—, que fue liquidado por las guerras napoleónicas y disgregado en varios territorios, a Erlangen le tocó en suerte el recién creado reino de Baviera, que aglutinó a algunas de las ciudades más prósperas del Imperio.

> «La señorita Noether fue el genio matemático creativo más importante que haya existido desde que comenzó la educación superior para las mujeres.»
>
> — ALBERT EINSTEIN.

La situación cambió radicalmente en 1871, cuando cristalizó el viejo anhelo de formar una gran nación germánica, un ideal ensalzado por los poemas de Goethe. La astucia diplomática y el arrojo militar del canciller prusiano Otto von Bismarck (1815-1898), cuyos ejércitos derrotaron sucesivamente en los campos de batalla a Dinamarca, Austria y Francia, hizo realidad la unificación. El denominado segundo Imperio alemán —II Reich— adjudicó la corona a Guillermo I y quedó articulado en torno al reino de Prusia, que había experimentado un impresionante despegue económico y militar como fruto de la Revolución Industrial y la aparición de una poderosa clase burguesa. En este marco histórico, Emmy Noether fue a la vez bávara y alemana, súbdita de un reino menguante y un imperio en ascenso que coexistían en un equilibrio

inestable, cada uno con su rey, sus leyes y costumbres. Por si fuera poco, compartía otra condición que más adelante, con la proclamación del tercer Imperio alemán —III Reich—, sí marcaría decisivamente su vida: era judía. De hecho, tanto la rama paterna como la materna de su familia eran judías y, al mismo tiempo, alemanas. Esta combinación no se sobrellevaba de forma sencilla en Alemania.

ENTRE DOS CULTURAS: GERMANOS Y HEBREOS

Afortunadamente, el siglo XIX había sido el gran siglo de la emancipación judía en toda Centroeuropa. Emmy Noether creció en el seno de un judaísmo que se había secularizado y aculturado dentro de la sociedad alemana, en un proceso de asimilación que precisó más de medio siglo. Pese a que no era oro todo lo que relucía y el antijudaísmo comenzaba a aflorar de nuevo, lo cierto es que se había recorrido un largo camino desde tiempos muy duros. La integración judía se había dado de forma prácticamente simultánea a comienzos del siglo XIX en toda Europa a través de los conocidos como «edictos de tolerancia», que regulaban la práctica del judaísmo en los diferentes Estados. Precisamente, el apellido de Emmy fue consecuencia de uno de estos edictos.

En 1809, el Gran Ducado de Baden publicó su propio edicto de tolerancia, el *Judenedikt*, que otorgó a los judíos reconocimiento oficial; obligándoles, eso sí, a adoptar un apellido germánico. El bisabuelo paterno de Emmy, de nombre Elias Samuel, propietario de un negocio en la ciudad de Bruchsal, cumplió la ley a rajatabla. Al efecto, eligió como apellido «Nöther» —escrito de esta forma— y cambió los nombres de sus nueve hijos por otros cristianizados.

Uno de estos niños, Hertz Samuel, ahora renombrado Hermann Nöther, fue el abuelo de Emmy. Su vida resultó ilustrativa del devenir de Alemania. Al amparo de la libertad económica y de movimientos, muchos judíos transformaron sus actividades tradicionales en compañías comerciales o industriales a mayor escala. El propio Hermann prosperó con un negocio de venta al por mayor

de herramientas de hierro en la ciudad de Mannheim. Inaugurado en 1837, el negocio dio pie a una compañía familiar que llegó a tener sucursales en Berlín y Dusseldorf y perduró un siglo: hasta 1937, cuando los nazis arrebataron a los judíos todos sus negocios, como preámbulo de lo que vendría poco después.

LA PRIMOGÉNITA DE LA FAMILIA NOETHER

Hermann Nöther tuvo varios hijos y uno de ellos, Max, prefirió por algún motivo utilizar la forma «Noether», que fue el apellido que adoptarían sus descendientes de forma definitiva. Max Noether dio bien pronto muestras de su valía, especialmente a los catorce años de edad, cuando la polio atacó su organismo y le impidió acudir al *Gymnasium*, la escuela de educación secundaria; en vez de resignarse, culminó desde casa sus estudios. No pudo caminar durante más de dos años, y de hecho arrastraría toda la vida una cojera permanente, pero superó la enfermedad, completó su formación y trabajó en diferentes universidades.

En 1875, con treinta años, Max se había convertido en un reconocido matemático y recaló en Erlangen, cuya universidad comenzaba a crecer. Allí ejerció como profesor asociado, paso previo al nivel final de profesor permanente. Ante él se dibujaba una hermosa perspectiva de futuro que redondeó en el verano de 1880, cuando contaba treinta y cinco años y se casó con Ida Amalia Kaufmann, una joven diez años menor que él. Ambos procedían de familias judías acomodadas: ella era hija de unos ricos comerciantes de Colonia, y los Noether mantenían el negocio fundado en Mannheim.

El 23 de marzo de 1882, dos años después del enlace, el matrimonio se vio bendecido con la llegada de su primogénita, de nombre completo Amelie Emmy Noether. La familia se amplió con tres hijos varones: Alfred, que nació un año después; Fritz, que lo hizo al siguiente, y Gustav Robert, que vino al mundo siete años más tarde que Emmy. El benjamín de la casa, por desdicha, padecería toda su vida de mala salud y discapacidad mental.

Emmy creció como una niña feliz, rodeada de un ambiente en el que predominaba el interés por la ciencia y un profundo sentimiento universitario, encarnado en su padre, en las amistades familiares y en su tío materno, Wilhelm Kaufmann, profesor de la Universidad de Berlín. En esta atmósfera cálida se departía con naturalidad sobre números, ecuaciones, curvas y geometría, por lo que prácticamente todos los hermanos terminaron entrelazando su vida con la ciencia, la universidad y la investigación. Emmy recibió su educación primaria en el colegio de la calle Fahrstrasse, donde se desenvolvió como una niña simpática y cariñosa y se ganó rápidamente el aprecio de sus compañeros y profesores.

Hay que recalcar que, pese a su elevada inteligencia, de la que no tardaría en ofrecer muestras, se trataba de una niña normal y corriente a la que se veía jugar alegre y despreocupada. Su infancia transcurrió de este modo, tan amable como poco digno de reseña. Ningún acontecimiento hizo presagiar que aquella chiquilla, que por lo demás era algo miope y ceceaba ligeramente, aparecería años más tarde en los anales que inmortalizan a los personajes míticos de las matemáticas. No protagonizó ninguna de esas anécdotas que se relacionan con algunos sabios en edades muy tempranas, como Gauss, Hamilton y tantos otros: ni sumó series monumentales de números, ni habló lenguas muertas con facilidad pasmosa. Tampoco efectuó ninguna deducción asombrosa e impropia de su edad. Únicamente se tiene constancia de una anécdota que se puede acercar a esta categoría, relatada por la hija de un profesor dos décadas después de producirse los hechos.

Según este testimonio, Emmy dejó boquiabiertos a los asistentes a una fiesta que celebró uno de sus compañeros. Los adultos distraían a los pequeños proponiéndoles que resolvieran acertijos de distinto tipo, hasta que una de las adivinanzas, según parece un problema de combinatoria, resultó ser más dura de la cuenta; para todos, excepto para ella, que rompió el mutismo reinante, se levantó y, de un plumazo, dio la respuesta correcta.

En el caso de las niñas, la costumbre era que completaran su formación recibiendo lecciones de piano. Se sabe que Emmy amaba la música, pero ni su afición ni sus dotes para el piano le hicieron progresar más allá de las piezas básicas para principiantes. Por contra, depositó toda su afición musical en la danza, de la que se convirtió en una auténtica entusiasta. Los años de infancia, así, transcurrieron felices y distraídos para Emmy, envuelta en la rutina acogedora de su hogar y la escuela. En aquellas aulas se confirmó como una alumna destacada que obtenía continuamente las mejores marcas; esta eficiencia la acompañó toda su vida. Sin embargo, en casa no demostraba tanto afán en los quehaceres cotidianos: le aburrían e incluso fastidiaban las tareas domésticas. Muchas décadas después, diversos testimonios reflejarían las anécdotas que Emmy Noether narró sobre su nula vocación como ama de casa.

El mayor aliciente contra aquella monotonía eran las reuniones y veladas musicales que organizaban los amigos y colegas universitarios de su padre, en las que, dentro de unos límites, reinaba la informalidad y la camaradería, y donde la música y las matemáticas se estrechaban la mano. Emmy aprovechaba cualquier ocasión para dar rienda suelta a su pasión por la danza. Al tiempo que seguía el ritmo de la música, a su alrededor flotaban conversaciones que giraban en torno al álgebra, las curvas, los números enteros y los polinomios, que serían sus compañeros inseparables hasta el fin.

LAS BARRERAS ENTRE HOMBRES Y MUJERES

La última mitad del siglo XIX parecía invitar al optimismo. A fin de cuentas, nadie podía presagiar la magnitud del drama histórico que aguardaba a Europa a la vuelta de siglo. La percepción unánime era que la Revolución Industrial había generado un desarrollo insólito en todos los órdenes de la vida. Los nuevos medios de transporte y de comunicación, así como el afán de renovación y superación que salpicaban el arte y la cultura, trajeron consigo nuevas aspiraciones; y no solo las de los judíos, sino también las de otro colectivo injustamente ninguneado: las mujeres.

Lo cierto es que hacia el año 1900 muchas barreras continuaban siendo infranqueables para ellas, si bien la música de fondo comenzaba a sonar de otra manera. En 1869, la apertura en Berlín de la primera institución de educación superior femenina impulsó una oleada de reivindicaciones de igualdad, que finalmente terminaría inundándolo todo. El choque generacional fue evidente. Las diferencias entre el antiguo estilo de vida y el que estaba emergiendo se ensancharon frente a lo que suponía una concepción novedosa: la revisión de los papeles asignados a cada sexo en el seno de la familia. La idea de que el conocimiento conduciría a la emancipación femenina inspiró la expansión por todo el territorio alemán de instituciones similares a la que se había creado en Berlín.

De este modo, la villa de Erlangen inauguró en 1887 la escuela municipal de educación superior de niñas. Dos años más tarde, Emmy Noether ingresó en ella para cumplimentar su primer curso. Permaneció allí desde 1889 hasta 1897, es decir, desde los siete años hasta cumplir los quince, y durante ese período estudió un plantel de asignaturas bastante similar al actual. No obstante, la lengua materna —alemán—, la lengua extranjera —francés— y las matemáticas se impartían con un nivel algo superior. Emmy Noether continuó mejorando sus conocimientos de idiomas y siguió al pie de la letra el guion que debía interpretar toda señorita de su posición. Así, después de una formación tan refinada, le esperaba a lo sumo dar clases en un centro similar a aquel donde había estudiado.

Efectivamente, todos los pasos que dio parecieron indicar que estos eran sus planes. El reino de Baviera exigía la superación de un examen oficial para obtener la acreditación de profesor de lengua inglesa o francesa. En la primavera de 1900, Emmy, con dieciocho años, se desplazó a Ansbach, superó el examen y obtuvo el título que la facultaba para impartir clases de lenguas modernas. Eso sí, su radio de acción quedó restringido a las instituciones para la educación de mujeres.

En cualquier caso, los exámenes certificaron que no era una estudiante de idiomas más, sino una joven muy inteligente y de extraordinario potencial: su media, tanto en inglés como en francés, superó por dos décimas la nota máxima establecida.

JUDÍOS ALEMANES, UNA IGUALDAD INCOMPLETA

En 1871, la reunificación de Alemania trajo consigo la completa emancipación legal de los ciudadanos judíos. Ya no eran aquellos humildes aldeanos que vivían en situación precaria y no podían casarse ni trabajar libremente; ahora engrosaban las filas de una pujante clase media que, poco a poco, se hallaba presente en todas las ciudades del Imperio. Emmy Noether nació en un momento brillante para la comunidad judía, que participó con intensidad en los nuevos movimientos culturales y artísticos. El arte, la literatura, la música y la ciencia, todas las aristas de la exquisita formación alemana, se infiltraron en su modo de vida, que aun así conservaba una identidad judía propia. Este era el talante de integración que saludó a Emmy Noether en sus primeros años. Los judíos, al abrigo de su libre ciudadanía y derechos, construían, comerciaban y progresaban palpando firmemente con los dedos un sueño: que el milagro se había obrado y eran tan judíos como alemanes. Sin embargo, la discriminación y el prejuicio hacia ellos no desapareció del todo. La participación en la vida política y el acceso a la administración, los puestos de gobierno, las escalas superiores del ejército y las universidades permanecieron vetados durante muchos años a todo aquel que no estuviera bautizado en el cristianismo. De este modo, ni un solo judío fue contratado como profesor universitario en Alemania hasta 1878.

Discriminación y semillas de odio

Posteriormente, cuando los judíos comenzaron a tener acceso a la universidad, sus carreras docentes se ralentizaron de forma premeditada. Esta situación fue padecida por el padre de Emmy, Max Noether, y por quien sería su director de tesis, Paul Gordan. Ninguno de ellos pudo alcanzar las más altas categorías de profesorado hasta muchos años después de lo que les correspondía. La integración, por más que fuera incompleta, despertó un nuevo tipo de antijudaísmo que ya no se apoyaba exclusivamente en el odio al diferente, sino al acomodado. Este veneno surtiría su efecto varias décadas más tarde.

***Boda judía* (1903), óleo sobre lienzo de Jozef Israëls.**

UNA JOVEN VALIENTE ACUDE A LA UNIVERSIDAD

A partir de ese momento y de acuerdo a lo que se esperaba de ella, la formación de Emmy Noether se consideró finalizada de forma satisfactoria. Todos le auguraron una vida relajada como profesora de señoritas en cualquier escuela del reino. Sin embargo, se rebeló contra su destino y se registró en la universidad de Erlangen, en el semestre de invierno del curso 1900-1901.

Resulta imposible discernir qué la impulsó a renunciar a su carrera como docente y ampliar sus estudios. Para las mujeres, la universidad era inaccesible, una vía muerta sin proyección laboral de ningún tipo. Emmy Noether no dejó escrito nada acerca de ese momento crucial, ni de sus verdaderos planes; tampoco lo hicieron sus allegados. Algunas mujeres acudían a la universidad para perfeccionar sus conocimientos y mejorar como profesoras. Esto último resulta compatible con el hecho de que Emmy Noether asistiera a cursos que también incluían algunas asignaturas de historia. Cabe preguntarse, pues, cuáles fueron sus dudas al llegar esa encrucijada. ¿Escuela superior para mujeres o universidad? ¿Lenguas modernas o matemáticas? ¿Un empleo seguro como profesora, o una senda espinosa en la facultad?

Max Noether y el resto de sus colegas sabían que ella atesoraba grandes cualidades para las matemáticas y la apoyaron en todo, aunque se lanzara a una carrera aparentemente sin futuro. No obstante, es posible que a sus oídos llegaran los rumores que circulaban sobre la inminencia de un cambio. Ciertamente, ya se perfilaban nuevos horizontes de vida para las mujeres, sobre todo en lo referente a la formación. Una buena muestra de ello lo constituían las modernas instituciones de educación superior para mujeres. Sin embargo, el proceso distaba mucho de haber culminado y la universidad continuaba vedada para el sexo femenino. Emmy Noether desembarcó en ella en el momento justo del cambio; una transición que experimentó, al tiempo que padeció, como testigo de primera mano.

A su llegada a la Sección II de la Escuela de Filosofía, en la que se encuadraban los estudios de ciencias, se encontró con sus 984 compañeros varones matriculados en aquella ilustre institución, sin más compañía femenina que la de otra intrépida estudiante. Asimismo, todos los profesores y los auxiliares de la universidad eran igualmente varones. Ninguna institución universitaria permitía que una mujer se matriculara de forma oficial como alumna; a lo sumo, y no siempre, se toleraba que asistieran a clase en calidad de oyente. Además, esta «autorización» dependía del consentimiento del profesor de cada curso. Las mujeres eran estudiantes de segunda, sin derecho a exámenes oficiales ni a recibir calificación reglamentaria alguna.

Es difícil imaginar cómo se escenificó este primer día, qué sintió y cómo la recibieron sus compañeros. ¡Una mujer, y además judía! Tampoco se sabe si participó o no en las clases, ni si los profesores la recibieron de buen grado. En todo caso, hizo gala de un arrojo considerable. Esta cualidad, por otra parte, nunca la abandonó, junto a su tenacidad e infinita capacidad de superación. Por otra parte, su entrada en las aulas se vio suavizada por la presencia e influencia de su padre y de los profesores con los que mantenía amistad, en cuyas casas había danzado alegremente de niña. Quién iba a decir que los colegas de su padre también terminarían siendo los suyos...

Emmy Noether asistió como oyente a la universidad de su ciudad natal entre 1900 y 1902 y al mismo tiempo se preparó para el examen de graduación, la prueba definitiva que daba acceso a cualquier universidad. ¿Por qué razón alguien que no tenía derecho a matricularse, una simple oyente, preparó tal grado de acceso? Dispusiera de información confidencial o no, superó el examen el 14 de julio de 1903 en Núremberg y quedó facultada para convertirse en alumna oficial de la universidad. Un año después, llegó la gran noticia: el reino de Baviera modificaba la legislación y reconocía a las mujeres el derecho de matrícula universitaria y de obtención del título oficial.

Fue así cómo, con inteligencia y determinación, Emmy Noether desdeñó la ruta que le tenían asignada y se internó en un mundo celosamente masculino. Sin embargo, ella jamás escogió ni a los hombres ni a las mujeres: solo optó por su pasión y punto fuerte, las matemáticas, sin importarle en qué compañía tuviera que caminar para seguirlas con fidelidad, por completo y para siempre.

Los meses que transcurrieron desde que se graduó en el verano de 1903 hasta que pudo matricularse de forma efectiva en la universidad marcaron el resto de su vida. La razón debe buscarse en un centro académico cuyo peso en la historia de las matemáticas adquiere tintes míticos: la Universidad de Gotinga. En el Segundo Imperio alemán había tres universidades libres, fundadas al margen de la Iglesia: Erlangen, Halle y Gotinga. Entre ellas sobresalía la de Gotinga, que hacia el año 1900 se había convertido en una suerte de Valhalla. Por sus aulas y pasillos pululaban matemáticos de la talla de Hermann Minkowski (1864-1909), David Hilbert (1862-1943) y Felix Christian Klein (1849-1925).

Precisamente, la amistad de Max Noether y Klein facilitó que Emmy Noether fuera admitida en Gotinga como oyente en el semestre de invierno del curso 1903-1904. Aquella universidad resultó a sus ojos un paraíso matemático y se sintió pletórica asistiendo a aquellas clases magistrales; incluso a sabiendas que si deseaba un título oficial debía regresar a Erlangen, porque Gotinga no se lo expediría. Ambas ciudades se hallan separadas por algo más de 300 kilómetros, una distancia que también podría ilustrar el salto entre dos siglos de matemáticas, pues Hilbert, Klein y otros perfilaban en Gotinga la nueva tierra matemática para el siglo XX. En cambio, Erlangen no era más que un simple, diminuto y pálido satélite que orbitaba en torno a Berlín, donde hombres como Bismarck dictaban la política de todo el Imperio alemán con absoluta firmeza. Berlín reinaba académicamente y ejercía su poderoso influjo sobre el resto de universidades. Su universidad marcaba los tiempos, los estilos y las formas de hacer matemáticas bajo la cancillería, también de hierro, de Ernst Kummer, (1810-1893), Karl Weierstrass (1815-1897) y Leopold Kronecker (1823-1891).

Hubo más actores y más escenarios en este drama, pero Gotinga y Berlín fueron polos opuestos en la época en la que comenzaron a definirse muchos de los rasgos de la matemática moderna. De hecho, la fascinación de Emmy Noether por Gotinga fue tal que volvería más adelante, para desde ese momento vivir a caballo entre dos ciudades.

El 24 de octubre de 1904, Emmy Noether apareció en los registros de la Universidad de Erlangen-Núremberg como alumna oficial, con el número 468, inscrita en cursos de matemáticas. Compartió esta posición con tres mujeres más, y otras dos fueron autorizadas como oyentes. Emmy Noether se sintió arropada por su padre, que era profesor de pleno derecho y dirigía los principales cursos junto al matemático alemán Paul Gordan (1837-1912), su futuro director de tesis. Además, sus hermanos Alfred y Fritz se incorporaron posteriormente a la universidad: el primero, para cursar química, y el segundo para estudiar matemáticas y física.

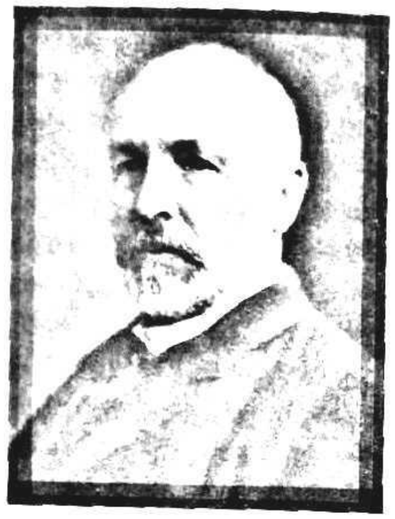
Emmy Noether sacó la carrera con provecho. Plegada a la necesidad, completó con Gordan su tesis doctoral al más puro y viejo estilo, del que luego renegaría. El 2 de julio de 1908 culminó el esfuerzo con la presentación de la misma, pero aún le quedaban por delante muchos años de sacrificio, siempre a la estela de Gordan, hasta convertirse en la artífice más destacada de una nueva forma de hacer, escribir y pensar matemáticas. A partir de Emmy Noether, la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas conquistarían por completo el lenguaje matemático. Se puede afirmar, sin equivocarse en lo esencial, que fue la primera que comenzó a utilizar estos elementos de forma sistemática y sin ningún pudor.

Llegados a este punto, parece lícito preguntarse: pero, ¿qué es la teoría de conjuntos? ¿Y qué son las estructuras algebraicas? ¿De verdad son tan importantes? Para seguir avanzando, lo primero será dar cumplida respuesta a estos interrogantes, que en tiempos de Emmy Noether desencadenaron una verdadera tormenta matemática.

LOS INACEPTABLES PUNTOS SUSPENSIVOS

La irrupción de la teoría de conjuntos y de las estructuras algebraicas trajo consigo un nuevo lenguaje. Al principio fueron vistas como herramientas misteriosas y muchos se preguntaron dónde residía su poder. De todo ello se hablará en el presente libro, pero ahora servirán para ilustrar algunas facetas de los cambios que se estaban produciendo; asimismo, explican los rasgos más sobresa-

GEORG CANTOR



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) nació en la ciudad rusa de San Petersburgo, pero la débil salud de su padre y el frío invernal motivaron que la familia emigrara en 1856 a Alemania, donde residiría para siempre. Cantor, que acreditó desde la infancia su brillantez como estudiante y matemático, desarrolló el grueso de su formación en Berlín y en 1870 dejó muestras de su impresionante talla matemática al probar importantes resultados sobre series trigonométricas que otras figuras de la época habían intentado resolver, sin éxito. Su genial idea de utilizar aplicaciones biyectivas para caracterizar los diferentes conjuntos infinitos fue publicada por primera vez en 1874. Su talento le catapultó en 1879, con solo 34 años de edad, a obtener una plaza de profesor permanente en la Universidad de Halle, donde desgranó el resto de su teoría de conjuntos en diversos trabajos hasta 1891. Las consecuencias de sus descubrimientos transformaron paulatinamente el panorama matemático, hecho que le sorprendió a él mismo: «Lo veo, pero no lo creo», confesó en una carta a Richard Dedekind. Por su parte, David Hilbert resumió el impacto de su obra al sentenciar que «del paraíso que Cantor creó para nosotros, nadie podrá expulsarnos».

lientes de dos visiones matemáticas muy diferentes, colocadas en una balanza que Emmy Noether ayudó a decantar.

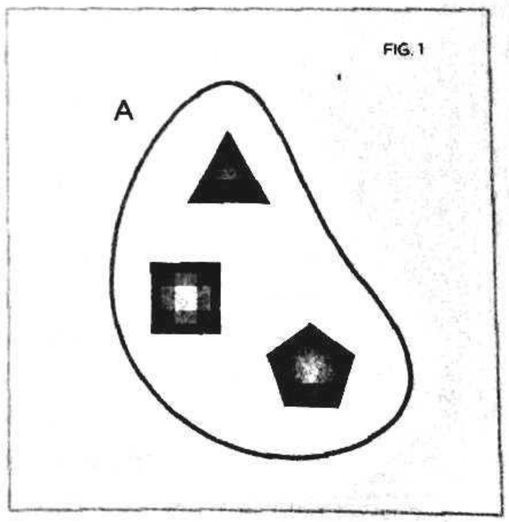
El triunvirato reinante que conformaban en Berlín los citados Kummer, Weierstrass y Kronecker había impuesto un estilo de hacer matemáticas que hallaba dos de sus pilares básicos en el constructivismo y el rigor extremo. Bajo la lupa de estos requisitos, se decidía de forma tiránica e inflexible qué era y qué no era matemáticas. Las filas de los damnificados por esta inflexibilidad incluyeron a Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1805-1859), Bernhard Riemann (1826-1866) y Richard Dedekind (1831-1916), entre otros ilustres matemáticos.

El fundamentalismo del triunvirato de Berlín llegó al extremo de perseguir la «herejía» incluso en el seno de sus filas, un drama cuya última escena incluyó que Kronecker intentara apuntillar al mismísimo Weierstrass imputándole el «delito» de infidelidad. En esta ruptura, no obstante, sí hubo terceras personas: a saber, Georg Cantor (1845-1918), con su teoría de conjuntos entre las manos. Se dio la circunstancia de que Cantor fue alumno de Weierstrass, Kummer y Kronecker entre 1863 y 1867, mientras estudiaba en la Universidad de Berlín.

Más tarde, entre 1874 y 1891, Cantor desarrollaría la parte más importante de su teoría de conjuntos, lo que le valdría el odio eterno de Kronecker. Este, más allá de toda lógica académica, intentó impedir que Cantor pusiera sobre el terreno la primera piedra sobre la que se edificaría buena parte de las matemáticas del siglo XX.

¿SE OCULTA UN PECADO ENTRE LOS CONJUNTOS?

Pero, ¿qué problemas puede acarrear un conjunto? ¿Qué hay de perverso en él que pueda suscitar semejante odio entre colegas matemáticos? De hecho, no parece que exista algo más cándido. Para designar uno, es suficiente con un trazo que rodee a unos cuantos objetos, e incluso en las más tiernas clases infantiles los pequeños lidian con ellos sin ningún problema. Así, basta el esquema que se muestra en la figura 1 para que, sin decir palabra ni precisar más aclaraciones, se presente un conjunto al que se ha llamado A y que consiste de un círculo, un triángulo y un pentágono, de los que a su vez se dice que son los elementos de A. Este tipo de representaciones pueden traer a la memoria los diagramas de Venn, aquellos globitos con forma de judía con los que en su día se explicaba qué era una unión



o una intersección. Cabe decir que el matemático británico John Venn (1834-1923) comenzó a utilizarlos hacia 1880, unos dos años antes de que naciera Emmy Noether, para representar de forma gráfica tanto conjuntos como enunciados lógicos.

Por supuesto, se puede formar conjuntos a capricho, darles el nombre que se desee y con más o menos elementos, ya se trate de figuras geométricas, números, letras, nombres de ciudades, etcétera. La única condición es que quede suficientemente claro cómo se llama el conjunto y cuáles son los objetos que forman parte de él: sus elementos.

Para este propósito, los diagramas gráficos al estilo de Venn resultan excesivos, ya que convierten cualquier libro de matemáticas en un muestrario de globos y legumbres salpicados de letras, números y otros elementos flotantes. Por el contrario, en la notación matemática estándar se emplea otra terminología, menos sugerente pero más compacta, que simboliza el sinuoso globito mediante unas escuetas llaves, entre las que se sitúan los elementos separándolos por comas. De esta manera, más brevemente, se puede escribir:

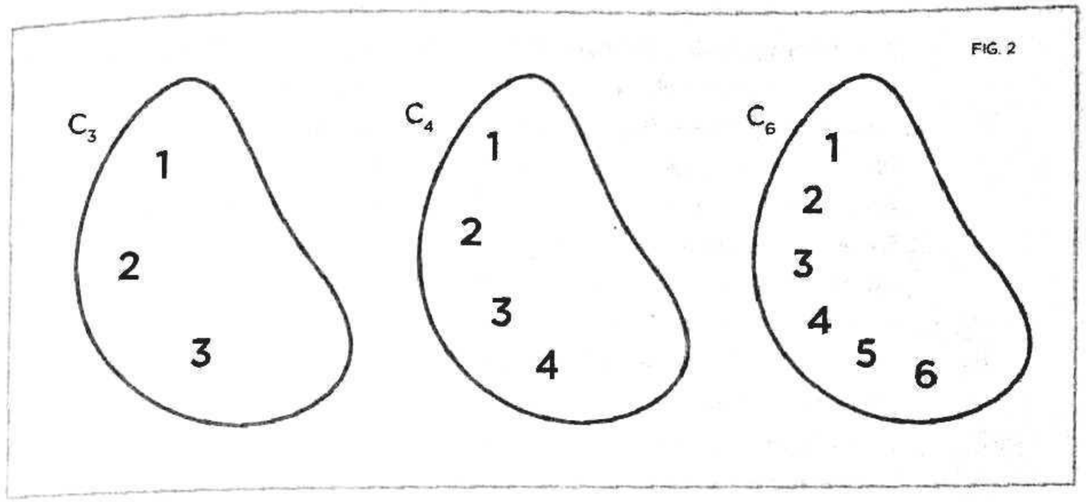
$$A = \{\blacktriangle, \blacksquare, \pentagon\}.$$

También se pondrá $\blacktriangle \in A$ para indicar que ▲ pertenece a A y es uno de sus elementos, o bien $\bullet \notin A$ para poner de manifiesto que el círculo no es elemento de A. Evidentemente, al tratarse de matemáticas, abundarán en general conjuntos de números como los que se presentan en la figura 2; o lo que es lo mismo, en una notación matemática más «seria»:

$$C_3 = \{1, 2, 3\}, \quad C_4 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Estos ejemplos pueden bastar, aunque del mismo modo también podrían considerarse conjuntos como C_{10}, C_{27} o C_{124}, cuya definición ya es imaginable a la vista de los tres casos anteriores.

Una de las primeras cosas que se le ocurre a cualquiera que trabaje con conjuntos es estudiar su tamaño, es decir, su número de elementos, para poder compararlos y decidir si uno es igual o más grande que otro. Está claro que el primer conjunto, A, tiene



tres elementos al igual que C_3. Asimismo, es evidente que C_4 tiene 4, que C_6 tiene 6 y que, atendiendo a la misma lógica y sin necesidad de escribir todos sus elementos, C_{124} tiene 124.

También resulta claro que, en lo que respecta al tamaño o número de elementos, A y C_3 son iguales y estos dos, a su vez, son más pequeños que C_4, C_6 o C_{124}. En la terminología matemática, el tamaño o número de elementos de un conjunto se denomina «cardinal» y se representa mediante el símbolo «#», que puede leerse como «número de elementos de». Por lo tanto:

$$\#A = 3, \quad \#C_3 = 3, \quad \#C_4 = 4, \quad \#C_6 = 6, \quad \#C_{124} = 124.$$

Hasta ahora, todo lo que se ha expuesto sobre conjuntos, llaves y elementos resulta diáfano y simple. ¿Quién podría disentir de estos razonamientos? ¿Titanes como Weierstrass o Kronecker, enfrentados a causa de unos humildes globitos? No había nada inaceptable en ellos. Sin embargo, el pecado, al parecer imperdonable, fue ir más allá, quererlo «todo». Fue como si la serpiente que tentó a Eva en el paraíso bíblico hubiera vuelto a descender desde el árbol de la ciencia y, enroscándose sobre sí misma, ofreciera de nuevo la tentación y adoptara un símbolo odioso: «∞», que se hizo llamar «infinito». Este símbolo representaba la insaciable ambición humana, toda una ofensa a los dioses: los inaceptables puntos suspensivos.

En el paraíso de Kronecker existían en armonía perfecta conjuntos o números, A, C_3, C_4, C_6, C_{124}. Como ya se ha señalado, no violaban ninguna ley sagrada. Sin embargo, podría decirse que en este mar de conjuntos simples de números se escondía el «mal». Así, si se considera $C_{124}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 124\}$ brota de inmediato una pregunta lógica: ¿por qué no ir más allá y considerar el siguiente número tras 124, el siguiente conjunto, 125 y su correspondiente C_{125}? Y tras él vendrán 126 con C_{126}, y por qué detenerse ahí, por qué no lanzarse a 1 000 con $C_{1\,000}$ y, llegados aquí, como ya se ha comprobado que cada vez que se van añadiendo y añadiendo números se obtienen conjuntos más grandes que contienen a todos los anteriores... ¿por qué no llegar hasta el final y añadir cualquier número que se pueda imaginar, 125, 126, ..., 1 000, ..., para obtener un conjunto que los contenga ya a todos?

He aquí el crimen. Este conjunto colosal mereció un nombre único e intocable: «conjunto de los números naturales». Acto seguido, pasó a ser designado por su símbolo, también único e intocable: ℕ.

$$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 1\,000, \overset{\infty}{\overset{\downarrow}{\cdots}}\}.$$

Pues bien, ℕ contiene «todos» los números que se emplean para contar, que se denominan «números naturales» y que son siempre enteros, sin decimales, y positivos.

Hubo un cómplice que auxilió de forma decisiva en el delito: los puntos suspensivos. No los primeros, que aparecen entre el 6 y el 1 000 y resumen una tarea que puede ser larga o inútil, como es la de escribir todos los números que faltan entre ambos. De este modo, aquí «...» simboliza un proceso que puede realizarse en un número finito de pasos, lo que se denomina «proceso constructivo», libre de toda culpa, aceptable y deseable. Por el contrario, los segundos puntos suspensivos, los que se han marcado con el símbolo prohibido, «∞», presentan una naturaleza más perversa, ya que simbolizan el proceso de seguir añadiendo números tras el 1 000 en una sucesión infinita de pasos, en la práctica irrealizable.

En realidad, los primeros puntos suspensivos son superfluos y más brevemente se podría poner $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, ya que

igualmente «...» hará referencia al proceso infinito de seguir añadiendo números naturales tras el 6, llegando a 1 000 y continuando interminablemente. Su propio pecado original vincula inseparablemente a «ℕ» con «∞», ya que de la construcción se desprende que su tamaño, su número de elementos o cardinal, será:

$$\#\mathbb{N}=\infty.$$

EL PROBLEMA DEL INFINITO

Todo lo anterior, «ℕ», «∞», los puntos suspensivos interminables, las cosas sin fin, fueron inadmisibles hasta la llegada de Cantor. Algo que no ha visto nadie, nunca, en ninguna parte, que se sabe que es imposible que sea observado, escrito, nombrado o construido, y cuya única certeza es que no puede ser, ¿puede decirse que existe? ¿Existe «ℕ»? ¿Es en realidad algo «∞»? Esta es la herejía contra la que lucharon Weierstrass y Kronecker, los cruzados de una matemática pura que no podía aceptar en sus razonamientos estas entidades imposibles.

Los números naturales, uno a uno, existen. Agrupados en conjuntos como $C_{124}=\{1, 2, 3, \ldots, 124\}$ o $C_{1\,000}=\{1, 2, 3, \ldots, 1\,000\}$ tampoco plantean ningún problema, dado que pueden obtenerse en un proceso finito y este ser mostrado de forma completa, explícita y real. Pero algo como ℕ, considerado con entidad propia, con existencia tangible, no podía formar parte de ningún razonamiento matemático serio.

El problema del infinito venía de antiguo en matemáticas. Platón, Aristóteles y otros filósofos, así como numerosos matemáticos, fueron conscientes de que considerar el infinito, con su interminable cantidad de pasos, como algo existente de forma actual y completa, empujaría a las matemáticas a un terreno pantanoso. No ha sido gratuito que anteriormente se hayan hecho referencias a serpientes, paraísos y al «todo», ya que este problema encerraba importantes connotaciones filosóficas y religiosas: la idea de infinito se identificaba con la de Dios, el compendio y conjunto de lo creado. Solo Él ostentaba el monopolio de una existencia ilimitada efectiva.

La necesidad de mantener a las matemáticas dentro de la tierra firme de las argumentaciones sólidas y la certeza absoluta condujo a soluciones como el finitismo o el constructivismo, que limitaban cualquier razonamiento matemático a argumentos reproducibles en pasos o algoritmos finitos. En este sentido, una conocida cita de Kronecker resumió la idea de una matemática construida sobre los números naturales en procesos claros, con un número de pasos limitados. Cualquier otra cosa que escapara a esta ley de pureza, quedaba automáticamente condenada y proscrita.

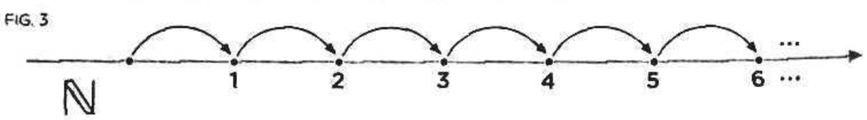
«Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre.»

— Leopold Kronecker.

Sin embargo, para los matemáticos, enfrentarse al infinito era una tarea ineludible. Podría afirmarse, incluso, que todo en matemáticas, de una manera u otra, conduce a la idea o intuición del infinito. ¿De qué tratan las matemáticas, si no es de números, y al hablarse de ellos cualquiera de sus clases producen conjuntos infinitos? Esto se ha visto para los números naturales y el conjunto que forman, $\mathbb{N}$, pero en realidad cualquiera de los tipos de números básicos que estudian los escolares también lo refleja.

Los números naturales son, sin duda, el caso más sencillo. Pueden representarse gráficamente de forma inmediata dando pasos de igual longitud —esto es, contando— a partir del punto 0 u origen, para generar así una sucesión de puntos igualmente espaciados de modo que cada uno de ellos corresponda a un número natural, tal y como se muestra en la figura 3. Esos puntos constituyen la representación gráfica de $\mathbb{N}$. Por supuesto, la recta y el proceso de asignación de puntos no tienen fin, del mismo modo que $\mathbb{N}$ es infinito.

FIG. 3



NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

Si se consideran además los números negativos, a los números naturales les siguen inmediatamente los números enteros que, también sin decimales, pueden ser positivos, negativos o nulos. El conjunto de los números enteros se designa mediante $\mathbb{Z}$ y evidentemente será:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

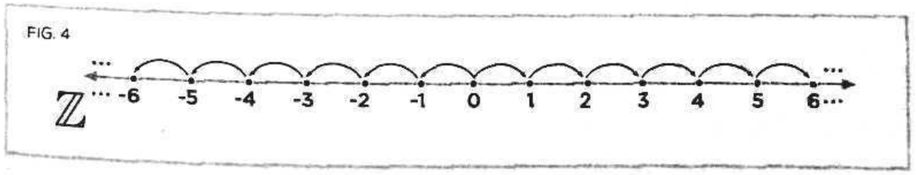
La misma idea que se empleó para $\mathbb{N}$ permite representarlos de forma sencilla, ya que los números negativos se alcanzan con pasos de idéntica longitud pero en sentido contrario, como se aprecia en la figura 4.

A los números naturales les siguen inmediatamente los números racionales, un caso más complejo. Un número es racional si puede escribirse en forma de fracción, ya sea positiva o negativa, de números naturales. Para identificar un número natural basta comprobar que carezca de decimales y sea de signo positivo. Aunque los racionales son más esquivos, también pueden ser detectados de un vistazo. Otra vez su aspecto, el de sus decimales, los delata, ya que:

— Los enteros, sin decimales, siempre se pueden escribir como una fracción: $3 = 3/1$; $27 = 27/1$; $-15 = -15/1$,
— Los números con decimales finitos también son una fracción: $0{,}75 = 75/100$; $3{,}234 = 3\,234/1\,000$; $-214{,}1345 = -2\,141\,345/10\,000$,
— Los números con decimales periódicos son fracciones: $0{,}3333\ldots = 0{,}\hat{3} = 1/3$.

Estas tres situaciones cubren todas las posibilidades para detectar números racionales de un vistazo: o no tienen decimales, o bien solo un puñado finito de ellos, o tienen decimales periódicos. Entonces, si $\mathbb{N}$ es inmenso e inasumible, según parece, el panora-

FIG. 4



ma se amplía y abre un abismo, ya que habrá que añadir otros muchos números a los que antes se tenía. Si se pudiera, que no es posible, escribirlos todos y atraparlos entre dos llaves, surgiría un nuevo conjunto aún más monstruoso e infinito: el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

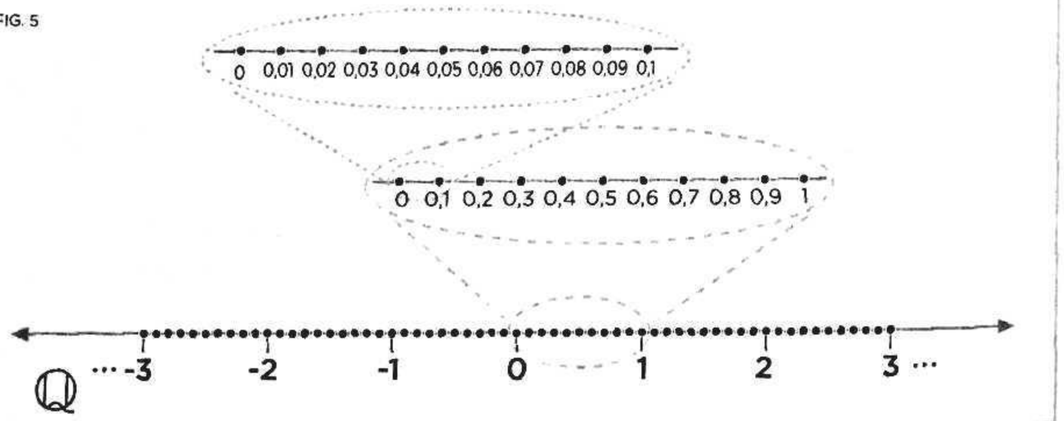
$$\mathbb{Q} = \{ \pm \mathbb{N}/\mathbb{Q}: \mathbb{N},\mathbb{Q} \text{ elementos de } \mathbb{N},\ \mathbb{Q} \neq 0\}.$$

Este conjunto también se hizo merecedor de letra propia, la $\mathbb{Q}$ de *quoziente* —cociente—, con la que el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) comenzó a designarlos desde 1895. Igualmente, era titánico y proscrito, porque su tamaño es nuevamente:

$$\infty,\ \#\mathbb{Q} = \infty.$$

Si todo ello no fuera suficiente, representar $\mathbb{Q}$ es poco menos que imposible. En efecto, solo con fijar la vista entre 0 y 1 se pueden encontrar los números 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9, todos ellos en $\mathbb{Q}$, y entre cada dos números nuevos aparecerán otros tantos. Así, entre 0 y 0,1 surgirán 0,01, 0,02, 0,03, ..., 0,09, todos en $\mathbb{Q}$, y otra vez entre cada dos aparecerán más, en una sucesión que puede calificarse de doblemente infinita. De este modo, los elementos de $\mathbb{Q}$ forman una lluvia dispersa que, más que representar, se puede imaginar como una nube densa de puntos sobre una recta que se extiende de forma infinita en ambos sentidos.

FIG. 5



NÚMEROS IRRACIONALES

Si la definición de $\mathbb{Q}$ no pareciera ya fantasía, la pirueta puede rematarse con el último conjunto de números que se trata aquí: los números irracionales. Los griegos fueron los primeros en darse cuenta de que al representar los puntos de $\mathbb{Q}$ quedaban huecos libres sobre la recta, es decir, hay números que no están en $\mathbb{Q}$ y no pueden escribirse como fracciones. El más célebre que hallaron fue $\sqrt{2}$, pero hay infinitos más. Como es lógico, $\sqrt{2}$ y cada uno de estos números han de tener infinitos decimales no periódicos fuera de $\mathbb{Q}$, dado que si tuvieran finitos decimales o fueran periódicos estarían en $\mathbb{Q}$ y serían una fracción. Entonces, serán de la forma:

$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073176 68...$

De nuevo, los puntos suspensivos que rematan la cifra vuelven a mostrar el carácter monstruoso de un número que jamás terminará de escribirse, porque nunca se agotarán los dígitos decimales. Este y todos los números de este tipo que escapan a lo razonable, que escapan a $\mathbb{Q}$, se denominan números irracionales. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... son todos así, y juntos y reunidos forman el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales.

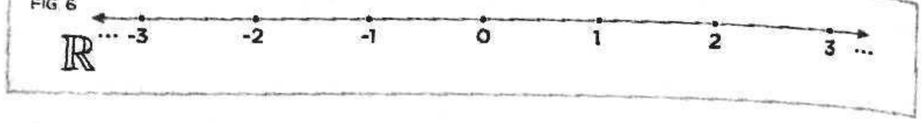
La importancia de los mismos radica en que si se une $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{I}$, se obtiene un nuevo conjunto, el «conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales». $\mathbb{R}$ contiene, pues, a todos los números que se pueda imaginar, enteros o no, positivos o negativos, con unos cuantos decimales o con infinitos, y puede describirse del siguiente modo:

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm \underbrace{c_1 c_2 c_3 \ldots c_n}_{\text{dígitos enteros}},\ \underbrace{d_1 d_2 d_3 \ldots}_{\text{dígitos decimales}} \right\},$$

donde se indica esquemáticamente que un número real tiene una cantidad finita, n, de dígitos enteros, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y una cantidad arbitraria, finita o no, incluso nula, de dígitos decimales, $d_1, d_2, d_3, \ldots$

Cualquier cosa de este tipo es un número real. Si se representa $\mathbb{Q}$ junto con los números que no están en $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{I}$, no quedará ya ningún hueco y se obtendrá, ahora sí, una recta «completa».

FIG 6



Es por ello que la gráfica de $\mathbb{R}$ es la recta tal cual, entera, sin sobresalto alguno, con puntos dispersos de forma continua a lo largo de toda su infinita longitud.

Los números de $\mathbb{R}$ son esenciales en todas las disciplinas matemáticas y científicas, ya que se utilizan para representar fenómenos de la realidad, cualquier medida de distancia, tiempo o temperatura. Todo ello se modeliza mediante números reales.

Sin necesidad de asistir a varios cursos de matemáticas en la Universidad de Berlín ni de leer las obras completas de Kronecker, han entrado en escena tres actores polémicos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Aceptar que estos conjuntos existen como tales fue inadmisible; y contar sus elementos, lo que obligaría a escribir el símbolo prohibido, una tarea proscrita, ya que, evidentemente:

$$\#\mathbb{N}=\infty, \quad \#\mathbb{Q}=\infty \quad \text{y} \quad \#\mathbb{R}=\infty.$$

De esta forma, contar lo incontable se tuvo por una pretensión aberrante, algo reservado solo a los dioses. Por eso, cuando lo hizo Cantor, se consideró poco menos que una herejía, lo que desencadenó una indisimulada «guerra matemática».

LA «HEREJÍA» DE CANTOR: CONTAR LO INCONTABLE

Sin embargo, para deducir si dos conjuntos tienen el mismo tamaño o uno es mayor que otro, no solamente se puede recurrir a contar sus elementos: existe un atajo clave. En el siguiente caso, no hace falta contar ningún elemento para darse cuenta de que los conjuntos B y D tienen el mismo tamaño, es decir #B = #D. Las flechas establecen una relación uno a uno entre los elementos del conjuntos inicial, B, y final, D. Así, por cada elemento en B habrá exactamente uno en D al final de su flecha, que será distinto para

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Una de las escasas fotografías de juventud tomadas a Emmy Noether.

FOTO SUPERIOR DERECHA.
El canciller Otto von Bismarck en 1871, año de promulgación del edicto de tolerancia hacia los judíos.

FOTO INFERIOR:
Vista de la fuente y los jardines en el acceso principal al castillo de Erlangen, la ciudad natal de Emmy Noether.

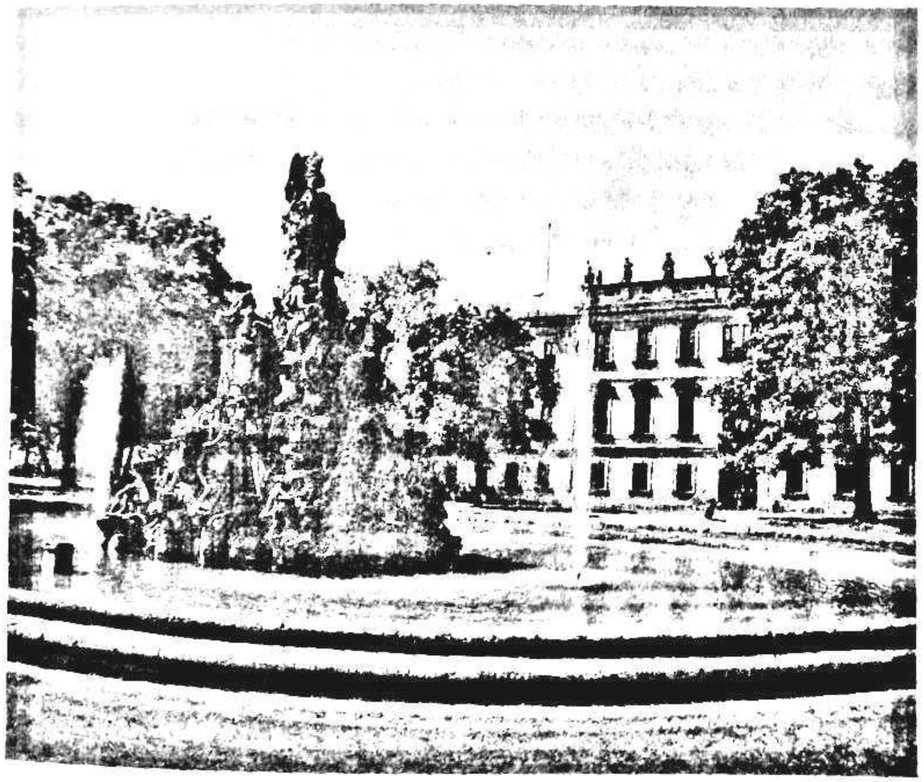
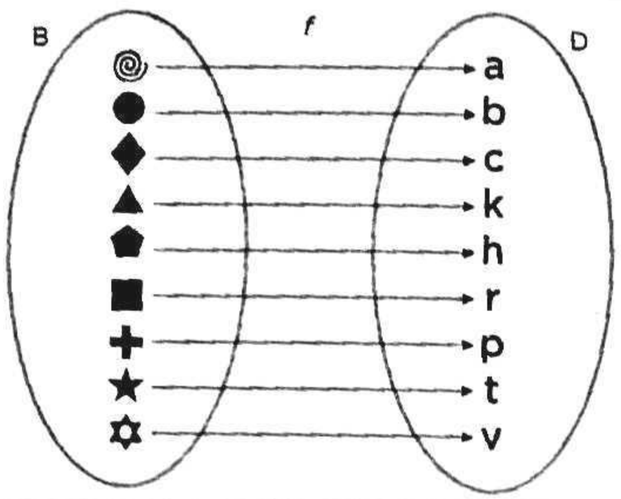


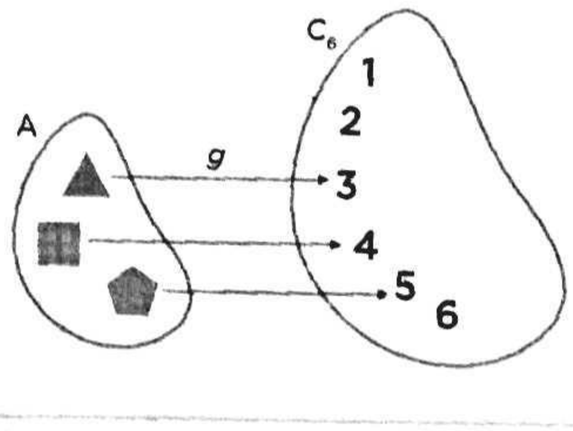
FIG. 7



cada elemento de B y sin que ningún elemento de D deje de estar apuntado por una flecha, y por fuerza se tendrá el mismo número de elementos. Por tanto, si se dispone de un conjunto de flechas entre los elementos de B y D como las que se observan en la figura 7, puede afirmarse, sin necesidad de contar, que ambos tienen el mismo tamaño, el mismo cardinal.

Este conjunto o disposición de flechas que se ha empleado ha sido elegido al azar. En realidad hay muchas otras configuraciones posibles de flechas que permitirían ilustrar igualmente el razonamiento anterior. En cualquier caso, puesto que este ejemplo se utilizará más adelante, a esta configuración concreta de flechas se le ha dado un nombre, *f*, para poder hacerle referencia más tarde. Un efecto similar se observa en este otro ejemplo, en la figura 8:

FIG. 8



De nuevo, las flechas asocian a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del final; pero ahora, además, quedan elementos en C_6 a los que no les llega flecha. Por tanto, por cada elemento de A se

tiene un elemento en C_6 que posee además algunos otros elementos adicionales de sobra, a los que no llegan flechas.

En esta ocasión, se cuente o no, está claro que el conjunto A tendrá menos elementos que el conjunto final C_6, o lo que es lo mismo, $\#A \leq \# C_6$. También se ha dado nombre, *g*, al conjunto de flechas entre A y C_6. La clave del razonamiento en el caso de *f* y *g* reside en que de cada elemento del conjunto inicial sale exactamente una flecha y a cada elemento del conjunto final llega una única flecha; o, como se ve en g, ninguna.

Los grupos de flechas que llevan cada elemento de un conjunto inicial en otro elemento de un conjunto final tienen un nombre en matemáticas: aplicaciones. Esto es, *f* y *g* en los gráficos anteriores son aplicaciones. Ciertamente, las flechas son expresivas por demás; pero, como sucede con los globitos, no se puede abusar de tanta vistosidad. Debe disponerse de una notación alternativa menos dinámica y fresca, pero más matemática y eficiente.

Así, la notación oficial para indicar a qué elemento llega la flecha que sale de otro utiliza el nombre de la aplicación junto con el elemento de partida entre paréntesis. Por ejemplo, para *g*, el elemento al que llega la flecha que sale de ▲ se denotará por $g(▲)$. En el diagrama se observa que ese elemento es 3, así que lo que se tiene es que $g(▲) = 3$. Así, reduciendo la presencia de flechas a la primera línea en la que se indican el nombre de la aplicación y los conjuntos inicial y final, *f* y *g* quedarían:

	$f: B \to D$		$g: A \to C_6$
$f(◎) = a$	$f(●) = b$	$f(◆) = c$	$g(▲) = 3$
$f(▲) = k$	$f(⬟) = h$	$f(■) = r$	$g(■) = 4$
$f(✚) = p$	$f(★) = t$	$f(✡) = v$	$g(⬟) = 5$

En realidad, pasar de esta notación al diagrama de flechas es sencillo, y a la inversa. Sin embargo, esta forma de escribir presenta la ventaja de que en ocasiones puede resumirse mediante una fórmula. Por ejemplo, puede utilizarse la siguiente para expresar *g* incluso de forma más concisa:

$$g: A \to C_6$$
$$g(x) = \text{número de vértices de } x.$$

En esta fórmula, x es lo que se llama una «variable». Cambiando x por un elemento de A, la fórmula permitirá calcular hasta dónde llega su flecha. Por ejemplo, si se cambia x por ▲ la fórmula quedará:

$$g(\blacktriangle) = \text{número de vértices de } \blacktriangle = 3.$$

Con ello, se puede calcular $g(\blacksquare)$ y $g(\pentagon)$, tal y como indica la fórmula, contando el número de vértices del cuadrado o del pentágono.

En principio, pasar de una expresión mediante una fórmula al diagrama de flechas resulta sencillo si se tiene suficiente paciencia, tal y como se muestra la figura 9, en la que partiendo de la expresión para una aplicación h dada mediante una fórmula se obtiene finalmente el diagrama de flechas.

El uso de fórmulas es imprescindible cuando el número de elementos de los conjuntos que se maneja es grande o infinito y hace imposible representarlas todas una a una.

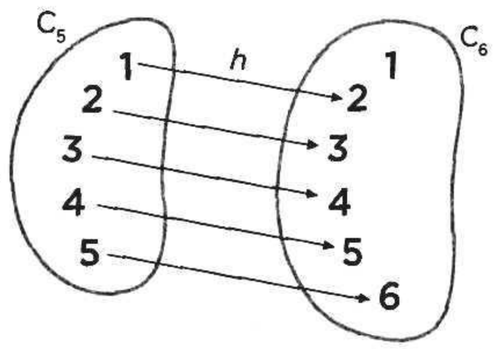
APLICACIONES BIYECTIVAS E INYECTIVAS

Aunque las aplicaciones son una de las herramientas básicas en todas las ramas de las matemáticas, lo importante aquí es que aplicaciones como f y g —incluso h— permiten comparar el tamaño de dos conjuntos. La idea expuesta es sencilla, para todas ellas se cumple que de cada elemento del conjunto inicial sale una flecha y las flechas que salen de elementos distintos llegan también a elementos distintos.

FIG. 9

$h: C_5 \to C_6$
$h(n) = n+1$ ⇒

$h: C_5 \to C_6$
$h(1) = 1+1 = 2$
$h(2) = 2+1 = 3$
$h(3) = 3+1 = 4$
$h(4) = 4+1 = 5$
$h(5) = 5+1 = 6$ ⇒



Al mirar el diagrama de f se comprueba que satisface esta regla claramente, ya que si se toman x, y, dos elementos cualesquiera, en el conjunto inicial, basta observar el dibujo para comprobar que:

$$\underbrace{x \neq y}_{\text{si son distintos}} \Rightarrow \underbrace{f(x) \neq f(y)}_{\substack{\text{entonces} \\ \text{sus flechas llegan} \\ \text{a elementos distintos}}},$$

O lo que es lo mismo:

$$\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{flecha que} \\ \text{sale de } x}} = \underbrace{f(y)}_{\substack{\text{flecha que} \\ \text{sale de } y}}}_{\substack{\text{si las flechas que salen de } x \text{ e } y \\ \text{llegan al mismo elemento}}} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{\substack{\text{entonces} \\ x \text{ e } y \text{ no pueden} \\ \text{ser distintos}}}.$$

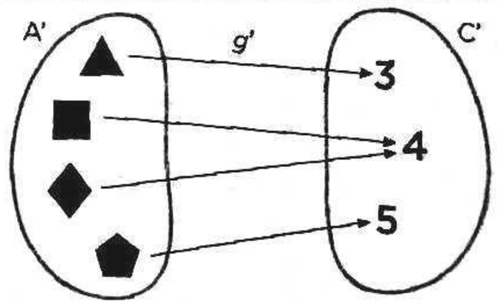
También es sencillo seguir los esquemas de flechas de g o h para darse cuenta de que ambas cumplen esta propiedad del mismo modo. Una aplicación que, como f, g o h, verifica esto, se denomina «inyectiva». Si además, como hace f, rellena por completo el conjunto final de modo que todos, absolutamente todos, sus elementos reciben una flecha, se dice que es «biyectiva».

La conclusión es inmediata: la condición para que dos conjuntos tengan el mismo tamaño, el mismo cardinal, es que exista entre ellos una aplicación biyectiva. Si la aplicación es únicamente inyectiva no se podrá afirmar tanto, pero sí se sabrá que el conjunto final tiene cardinal mayor o igual que el inicial.

No todas las aplicaciones son biyectivas o inyectivas. Así, h y g son inyectivas, pero no biyectivas. Véase, por ejemplo, la figura 10:

FIG. 10

$g': A' = \{\blacktriangle, \blacksquare, \blacklozenge, \pentagon\} \to C' = \{3, 4, 5\}$
$g'(x) =$ número de vértices de x



no es inyectiva —y por tanto, tampoco biyectiva— porque las flechas que salen de ■ y ◆, que son elementos distintos, llegan ambas al mismo elemento 4. Por tanto, se tendría que para $x = ■$, $y = ◆$,

$$\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{g'(■)=4} = \underbrace{g'(y)}_{g'(◆)=4}}_{\text{las flechas que salen de } x \text{ e } y \text{ llegan al mismo elemento}} \Rightarrow_{\text{entonces}} \underbrace{x \neq y}_{\text{ya que } ■ \neq ◆}.$$

En consecuencia, tampoco se tiene para g' la conclusión correspondiente y no es cierto que $\#A' \leq \#C'$.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con contar infinitos? ¿Cuál fue la idea genial de Cantor? La respuesta es brillante: puesto que no se tienen dedos suficientes para contar los elementos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, se utilizan flechas en su lugar. Es decir, ¡se emplean aplicaciones biyectivas e inyectivas!

UN EJEMPLO CONCRETO

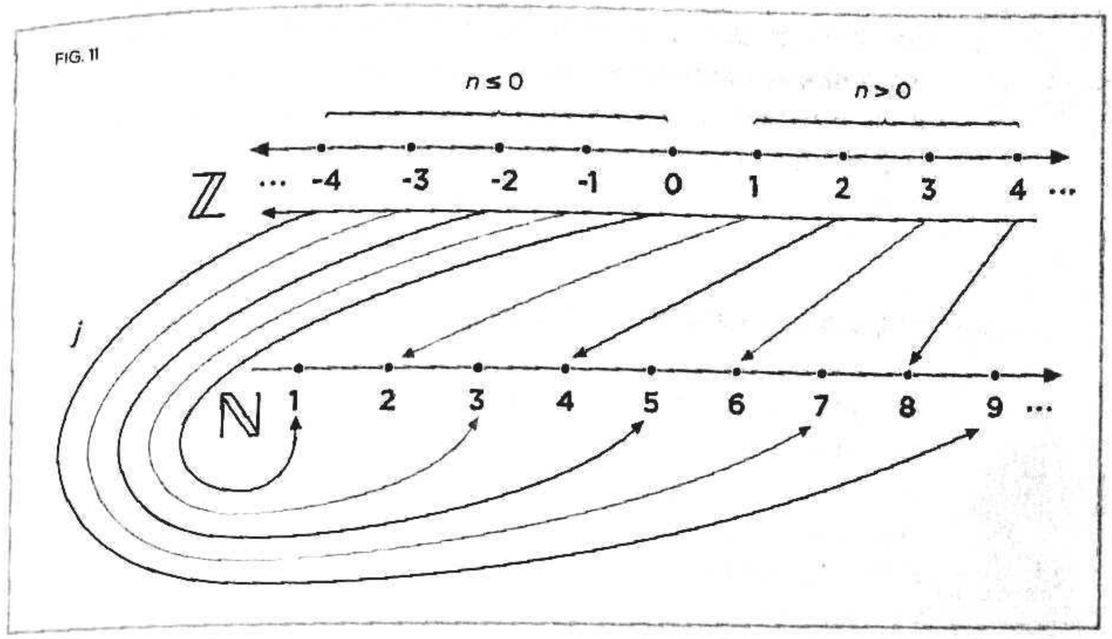
Tómense $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, ambos conjuntos infinitos. $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Z}$, es lo que se llama un subconjunto de $\mathbb{Z}$, y este hecho se denota escribiendo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Por ello, es imposible que $\mathbb{N}$ tenga más elementos que $\mathbb{Z}$, así que de entrada se tiene que $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z}$.

La intuición parece clara: puesto que $\mathbb{Z}$ incluye a los negativos, que no son números naturales, $\#\mathbb{N}$ nunca podrá ser igual a $\#\mathbb{Z}$. Sin embargo, la intuición engaña. Tómese ahora la aplicación:

$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$j(n) = \begin{cases} 2(-n)+1 & \text{si } n \leq 0 \\ 2n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Al observar la figura 11 se comprueba que la definición resulta coherente, es decir, para cada elemento n que tomemos en $\mathbb{Z}$, la flecha que sale de él llegará a $\mathbb{N}$ y, por lo tanto, j es realmente una aplicación que va desde $\mathbb{Z}$ hasta $\mathbb{N}$. Por otro lado, se aprecia que la aplicación es inyectiva, ya que a cada elemento de $\mathbb{N}$ llega una única flecha. En realidad, la aplicación j rellena todo el con-

FIG. 11



junto $\mathbb{N}$, ya que a cada uno de sus elementos, a todos, les llega una flecha. Por tanto, j es biyectiva.

Ahora es cuando se desmorona el castillo de la intuición. Si hay una aplicación inyectiva desde el conjunto inicial $\mathbb{N}$ hasta el conjunto final $\mathbb{Z}$, por fuerza, el conjunto inicial tendrá que ser de tamaño menor o igual al final, y así, $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z}$. Sin embargo, antes se ha visto que obligatoriamente $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z}$, por lo que, acorralados, ha de aceptarse:

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}.$$

¡$\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ tienen el mismo tamaño! La intuición ha caído por el precipicio; y con ella, buena parte de las normas de lógica y de sentido común que desde los griegos habían obrado como pilares del razonamiento. La tormenta solo hizo que desatarse, y bastó que Cantor tirara del hilo para hacer saltar las costuras de un traje que empezaba a ser estrecho.

Es evidente, que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{N}$ está dentro de $\mathbb{Z}$, que está dentro de $\mathbb{Q}$, que está dentro de $\mathbb{R}$. Por tanto, se tiene también que:

$$\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z} \leq \#\mathbb{Q} \leq \#\mathbb{R}.$$

En este punto se debe recurrir al teorema fundamental del álgebra, cuya aplicación en este caso, que implica el principio de descomposición en números primos, acabaría por demostrar que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ tienen el mismo número de elementos.

HACIA EL «RAZONAMIENTO DIAGONAL DE CANTOR»

Por ahora, todos los conjuntos interminables examinados han finalizado siendo lo mismo, siempre del mismo tamaño. Podría deducirse que hay un único infinito y cualquier conjunto que no es finito ha de coincidir con él. El eslabón más duro de la cadena es el último. De la secuencia $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ se deducía $\#\mathbb{N}\leq\#\mathbb{Z}\leq\#\mathbb{Q}\leq\#\mathbb{R}$ y se sabe ya que la primera y la segunda de las desigualdades es, en realidad, un igual. ¿Sucederá lo mismo con la tercera desigualdad? ¿Será $\mathbb{R}$ del mismo tamaño que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$? Hay que resolver la incógnita, $\mathbb{N}$ versus $\mathbb{R}$, y ver qué resulta.

Si de la desigual batalla salta otra vez la sorpresa, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ tendrán el mismo tamaño y entonces existirá una aplicación biyectiva φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Cada flecha de esa aplicación llegará a un número de $\mathbb{R}$ de manera que $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ... serán todos números reales con su parte entera y sus dígitos decimales de la forma:

φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$\varphi(1)=e_1{}'\,\mathbf{d_{1,1}}\,d_{1,2}\,d_{1,3}\,d_{1,4}\,d_{1,5}\ldots$
$\varphi(2)=e_2{}'\,d_{2,1}\,\mathbf{d_{2,2}}\,d_{2,3}\,d_{2,4}\,d_{2,5}\ldots$
$\varphi(3)=e_3{}'\,d_{3,1}\,d_{3,2}\,\mathbf{d_{3,3}}\,d_{3,4}\,d_{3,5}\ldots$
$\varphi(4)=e_4{}'\,d_{4,1}\,d_{4,2}\,d_{4,3}\,\mathbf{d_{4,4}}\,d_{4,5}\ldots$
$\varphi(5)=e_5{}'\,d_{5,1}\,d_{5,2}\,d_{5,3}\,d_{5,4}\,\mathbf{d_{5,5}}\ldots$
...
$\varphi(n)=e_n{}'\,d_{n,1}\,d_{n,2}\,d_{n,3}\,d_{n,4}\,d_{n,5}\ldots$
...

Ejemplo

φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$\varphi(1)=$ 2324,**2**3491...
$\varphi(2)=$ −23,5**1**743...
$\varphi(3)=$ 12345,40**8**91...
$\varphi(4)=$ 37,656**9**1...
$\varphi(5)=$ 0,5430**5**...
...

Puesto que φ es biyectiva, sus flechas deben rellenar completamente $\mathbb{R}$, es decir, calculando $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ... se obtendrían, sin faltar ni uno solo, todos los números reales.

Sin embargo, búsquese un número real, r, lo suficientemente fastidioso como para complicar el desenlace. La parte entera de dicho número será cero, sus dígitos decimales se notarán r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, ... y se tomarán siempre diferentes de 0 y 9 para evitar las posibles ambigüedades que se dan en la notación decimal. Por ejemplo, $0{,}099999\ldots = 0{,}1$, son dos representaciones decimales diferentes del mismo número.

Ahora se elegirán los dígitos decimales de r de modo que r_1 no coincida con el primer dígito decimal de $\varphi(1)$, que r_2 no coincida con el segundo dígito decimal de $\varphi(2)$ y tampoco r_3 coincida con el tercer dígito decimal de $\varphi(3)$, y así sucesivamente. Dicho de otra forma:

$$r=0{,}\underbrace{r_1}_{d_{1,1}}\underbrace{r_2}_{d_{2,2}}\underbrace{r_3}_{d_{3,3}}\underbrace{r_4}_{d_{4,4}}\underbrace{r_5}_{d_{5,5}}\cdots$$

Ejemplo:
$r=0{,}\underbrace{1}_{2}\underbrace{2}_{1}\underbrace{1}_{8}\underbrace{1}_{9}\underbrace{1}_{5}\ldots$

Existe la libertad de elegir los dígitos de r siempre que en cada posición eviten coincidir con los dígitos que, dispuestos en forma diagonal, están marcados en negrita en la definición de φ.

Ahora cabe preguntarse si alguna de las flechas de φ termina en r para emitir una respuesta tajante: no. De hecho, $\varphi(1)\neq r$, ya que difieren en su primer dígito decimal. A su vez, también, $\varphi(2)\neq r$, pues no coinciden en su segundo dígito decimal, y $\varphi(3)\neq r$ por tener ambos números el tercer dígito decimal distinto. Sucesivamente, se concluye que r no coincide con $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, ni con ninguna de las otras flechas de la aplicación.

Así, r, sano y salvo, victorioso al final de los puntos suspensivos, anuncia solemnemente que ninguna aplicación φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ puede rellenar jamás por completo todo $\mathbb{R}$, porque siempre será posible construir un díscolo número real con su parte entera y sus decimales que escape de ella.

Este argumento es lo que se denomina «razonamiento diagonal de Cantor» y permite afirmar que:

$$\#\mathbb{N}=\#\mathbb{Q}\lneq\#\mathbb{R}.$$

Este es un hecho trascendental, ya que quiere decir que hay diferentes tipos de infinitos. Efectivamente, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen infinitos elementos, pero se trata de un infinito diferente, de menor magnitud que el que le corresponde a $\mathbb{R}$. El infinito de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, su cardinal, se denota $\aleph_0$ y los conjuntos que tienen el mismo tamaño que $\mathbb{N}$, cuyo cardinal es también $\aleph_0$, se denominan conjuntos «numerables». $\mathbb{Q}$ y el conjunto $\mathbb{Z}$ son numerables. El infinito que corresponde a $\mathbb{R}$ es, sin necesidad de entrar en mayores detalles técnicos, $\aleph_1$.

$$\underbrace{\aleph_0}_{\substack{\infty \text{ de} \\ \mathbb{N} \text{ y } \mathbb{Q}}} < \underbrace{\aleph_1}_{\infty \text{ de } \mathbb{R}} .$$

En realidad, Cantor demostró que existe una cadena interminable de infinitos cada vez mayores. Al estudiar sus propiedades, quitó la mordaza que había constreñido a una rama completa de la matemática, la teoría de conjuntos, que desde ese momento estalló removiendo todos los fundamentos de la disciplina.

EL TRIUNFO DE LA NUEVA MATEMÁTICA

La época de Cantor está salpicada de pasajes que se vieron afectados por un sentido casi religioso de la matemática, lo que movió al prejuicio e impidió aceptar nuevas teorías y técnicas. Las apelaciones a lo divino y a Dios pueden resultar llamativas en una disciplina que reclama la asepsia lógica más absoluta, pero fueron constantes en aquel momento. Por ejemplo, el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) calificó de «demonio deplorable» a los nuevos ejemplos dados por Weierstrass de funciones con comportamiento extraordinario que eran continuas y no derivables en ningún punto, con las que mostró que muchos objetos matemáticos necesitaban una revisión completa y nuevas herramientas para su estudio, como la teoría de conjuntos.

No solamente el análisis de funciones mostraba signos de asfixia. En los dominios del álgebra también se advertía una necesidad imperiosa de oxígeno, que deparó colisiones paralelas a las que

mantuvieron Kronecker y Cantor, pero con el protagonismo de otros actores. Afortunadamente, el sainete resultaría esta vez más amable y alguno de sus momentos más trascendentales se representarían con Emmy Noether ya próxima a entrar en escena, dispuesta a compartir reparto con estrellas como Paul Gordan y David Hilbert.

Gordan dedicó buena parte de su carrera al estudio de los invariantes algebraicos, al punto que fue conocido como «el rey de la teoría de invariantes». En 1868 obtuvo su resultado más importante, al demostrar que el conjunto de invariantes para las formas de dos variables y de grado dado se podía obtener a partir de un pequeño grupo finito, llamado «base». Para ello recurrió a un complejo montaje computacional, capaz de dejar exhausto a cualquiera que no fuera él mismo. Su dificultad era tal que, más allá del caso concreto inicial, fue imposible extenderlo a formas con tres, cuatro o más variables.

Justo veinte años más tarde, Hilbert probó su «teorema de la base», válido ya para cualquier número de variables —el resultado de Gordan apenas era un caso particular—. Al efecto, se valió de un nuevo enfoque, más abstracto, que eludía todos aquellos algoritmos particulares que necesitó Gordan. En la estela de Cantor, Hilbert recurrió a la magia de lo invisible, de lo que existe pero no puede verse, y su resultado fue un teorema de existencia que dice que algo está ahí, que demuestra que ciertamente ha de estar ahí, pero sin explicar cómo obtenerlo de forma efectiva.

El paso de una matemática algorítmica, en la que se manejan objetos definidos de forma constructiva y algebraica, a técnicas más complejas y abstractas, marcó un hito. Por fin se alcanzaba la cima de una colina desde la que contemplar nuevos paisajes, y para la que se precisaban nuevos caminos. A Emmy Noether le tocó formar parte de la última expedición que coronaba esa colina, ya que debía aprobar su tesis doctoral. Hombro a hombro con Gordan, ayudó a empujar el viejo carromato algorítmico hasta allí arriba, con paso firme, para advertir posteriormente que debía ser abandonado en la cumbre. No había otro remedio: para transitar por aquellas novedosas rutas, resultaba obligado deshacerse del carro y avanzar con otro tipo de equipaje. Y lo hizo.

De esta forma, con su tesis doctoral bajo el brazo, se plantó justo en la frontera entre dos matemáticas: la de las fórmulas interminables, que había aprendido en Erlangen, y la de la magia prohibida del infinito, que había atisbado en Gotinga. Su mente puso el resto y las matemáticas, de su mano, dieron un salto de gigante hacia el futuro.

CAPÍTULO 2

De la «cacería de invariantes» al sueño de Gotinga

Una vez doctorada, Emmy Noether tuvo que posponer su búsqueda de nuevos horizontes matemáticos para trabajar durante años con su director de tesis, Paul Gordan, en una especie de «cacería de invariantes». Estos trabajos la sumieron en un laberinto de complejos cálculos que, pese a ciertos logros, limitaron su talento a casos particulares. Finalmente, su anhelo de participar en la senda matemática abierta por la Universidad de Gotinga llegó de la mano de Hilbert y Klein.

Emmy Noether obtuvo su doctorado en Matemáticas el 13 de diciembre de 1907. Este hito llenó de gozo a su director de tesis, Paul Gordan, que con 71 años de edad se hallaba ya al final de su carrera. Sorprendentemente, Emmy Noether fue su primera y única alumna de doctorado, lo que en cierto modo supeditó la trayectoria de aquella joven tan prometedora, que por lo pronto se vio obligada a vivir a la sombra del viejo profesor. Gordan tenía siete años más que Max Noether, el padre de Emmy, con el que trabó una sólida amistad apoyada en dos grandes vínculos: el judaísmo y el amor por las matemáticas.

Los testimonios de la época acreditan que Gordan era un profesor extremadamente simpático y muy competente en la esfera matemática, donde gozó de prestigio entre los grandes de su época. Si bien trabajó en problemas matemáticos de diversa índole, fueron sus resultados sobre teoría de invariantes algebraicos los que le granjearon el apelativo de «rey de los invariantes». En 1868 había conseguido demostrar su gran teorema sobre la generación finita de invariantes para las formas de dos variables. Para ello empleó el denominado «método simbólico» de Aronhold y Clebsh, que consiste en la introducción de ciertos elementos simbólicos de los que, más que su naturaleza o significado exacto, interesan sus interrelaciones. Es decir, puede haber un conjunto de símbolos que no representan nada en concreto, pero se relacionan unos con

otros de una forma específica; y esta estructura de relaciones es, precisamente, la que permite resolver el problema.

Sin duda, el método de Gordan era constructivo y permitía obtener todos los posibles invariantes, aun a costa de cierta fuerza bruta de cálculo. Se trataba de un logro impresionante, pues no se trataba de descubrir uno o dos nuevos invariantes: el viejo profesor había ido mucho más allá escribiendo de forma sencilla cualquiera de ellos, todos los posibles, e incluso cerró el problema para el caso de dos variables. Su técnica, en principio, parecía válida para los demás casos sin resolver, con tres, cuatro o más variables.

Desafortunadamente, tras este éxito inicial, Gordan se topó con el muro que él mismo había levantado: su método era demasiado complejo. La cantidad de cálculos que involucraba era tal que, a partir de su demostración inicial, ni siquiera él mismo pudo progresar más allá de algunos casos particulares. Solo la pirueta de Hilbert, con sus nuevas técnicas abstractas, ofreció una posibilidad de escape al precipicio de cálculos en el que Gordan había quedado atascado. De hecho, dos décadas después, en 1888, Hilbert pudo demostrar que el problema para tres, cuatro y cualquier número de variables tenía solución. La vía que utilizó fue diametralmente opuesta a la empleada por Gordan, que demostraba las cosas a base de exponerlas ante la mirada, construir una solución y mostrarla orgulloso; Hilbert, en cambio, dedujo por métodos indirectos que ha de existir, sin calcularla en realidad.

A pesar de la diferencia de enfoques, ambos métodos son compatibles. En aquel momento, Hilbert no construyó los invariantes prometidos. Gordan continuó, pues, manteniendo su propio espacio vital, al menos hasta que las promesas de Hilbert encontraran un maestro constructor que las materializara. Finalmente, Gordan compartió el objetivo de conseguir una versión constructiva a partir de los resultados de Hilbert y no perdió la oportunidad: aprovechó la parte más algorítmica de las nuevas ideas y propuso modos explícitos para ordenar los polinomios necesarios en los cálculos. Con ello, definió lo que más tarde se conocería como «bases de Groebner», esenciales hoy en día para el álgebra computacional. Estas permitieron trabajar más allá del ya resuelto caso de dos variables y abrieron un horizonte en el que Emmy Noether se adentraría con éxito.

EMMY NOETHER ENTRA EN JUEGO

Aún enrolada con Gordan y bajo sus designios matemáticos, Emmy Noether se lanzó por primera vez a la pesca de los últimos invariantes en el pequeño caladero que Hilbert dejaba, por el momento, libre. Gordan hizo alarde durante sus últimos años de una magnífica capacidad de cálculo y supo explotar al máximo el método simbólico, con lo que logró resolver distintos casos particulares que, por otra parte, se mostraban cada vez más inaccesibles. De hecho, solo pudo cerrar el problema para tres variables en el caso de formas de grado dos y de grado tres. El grado cuatro fue la guinda del pastel que reservó para su alumna más aventajada: Emmy Noether.

> «He olvidado por completo todo el cálculo simbólico que aprendí.»
>
> — EMMY NOETHER.

En su tesis doctoral, titulada *Sobre la construcción de los sistemas formales de las formas ternarias bicuadráticas*, Emmy Noether estudió a fondo el caso de las formas de tres variables y grado cuatro, para las que realizó un sistema de 331 invariantes básicos a partir de los cuales pueden obtenerse todos los demás. El acto de lectura de la tesis tuvo lugar el 13 de diciembre de 1907 y, por el extraordinario valor de la misma, mereció la distinción *summa cum laude*.

El trabajo reveló un asombroso virtuosismo en la ejecución de cálculos y fue muy bien recibido por la comunidad matemática. No obstante, la simple contemplación de las tablas incluidas en la tesis, que recopila cientos de invariantes en decenas de filas y columnas, puede llegar a horrorizar incluso al matemático más generoso. Años más tarde, la propia Emmy Noether la calificaría literalmente como una «bazofia», junto a todo su desarrollo posterior sobre invariantes. Otros testimonios más amables afirmaron que describió su tesis como «una jungla de cálculos» y que ni siquiera la recordaba.

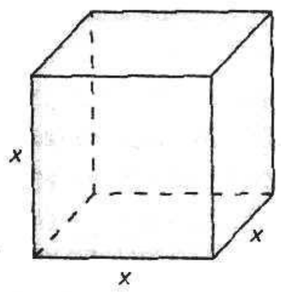
En el transcurso de 1888, Hilbert recurrió a nuevos métodos abstractos para demostrar que el teorema de Gordan para los invariantes de formas con dos variables era, en realidad, válido para tres, cuatro o cuantas variables se deseen. Para Emmy Noether, aquello fue una revelación: ya no quería seguir perdida en aquel laberinto de formas ternarias de grado cuatro que poblaron su tesis, sino avanzar codo a codo con Hilbert. El tiempo le dio la razón y, tristemente, todo el meritorio trabajo de Gordan quedó en el extrarradio de los pequeños casos particulares, alejados de la gran teoría central.

En cualquier caso, la pericia y perseverancia que exhibió Gordan —y con él, Emmy Noether— en la articulación de cálculos simbólicos complejos resultó sorprendente. Cabe señalar que, tanto tiempo después, incluso con el concurso de ordenadores, el cálculo constructivo de invariantes no ha podido avanzar mucho más allá de donde ellos lo dejaron a principios del siglo XX. Asimis-

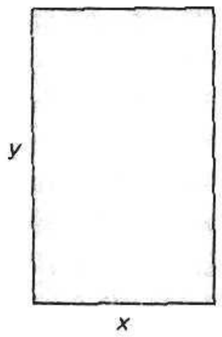
SOBRE FÓRMULAS, FORMAS Y «CUÁNTICOS»

La rama de las matemáticas en la que trabajaron Gordan y Noether se denomina «álgebra», disciplina que se dedica a estudiar las fórmulas obtenidas mediante operaciones aritméticas básicas de suma y producto. Las matemáticas intentan proporcionar resultados que sean válidos en general para muchos casos diferentes. Para lograrlo, se utilizan fórmulas y variables que resumen de modo compacto un grupo grande de casos. Por ejemplo, el área de un cuadrado de lado 2 es $2 \cdot 2 = 4$. Este cálculo es exacto, pero solo válido para un cuadrado de lado 2. Un cuadrado cualquiera tendrá lado 2, 3, 4 o, en general, un número en principio desconocido hasta que no se mida el cuadrado, al que se llamará x. En tal caso, el área del cuadrado será $x \cdot x = x^2$. Esta expresión x^2 se denomina «fórmula» y en ella aparece x, un dato desconocido o «variable». Esta fórmula resuelve un problema, el área del cuadrado, para una infinidad de casos. Así, diferentes problemas dan lugar a distintas fórmulas con diversas variables. Por ejemplo:

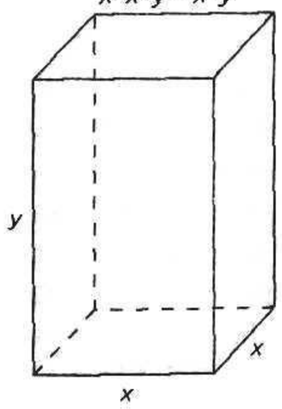
Volumen de un cubo: $x \cdot x \cdot x = x^3$



Área de un rectángulo: $x \cdot y = xy$



Volumen de una caja: $x \cdot x \cdot y = x^2 y$



Las expresiones x^2, x^3, xy, $x^2 y$ son fórmulas simples en las que aparecen una o dos variables, pero pueden necesitarse tres, cuatro o más. Cada una de estas fórmulas en las que aparece un solo término se denominan «monomios»; y el número de variables que aparecen multiplicando en cada monomio se llama «grado». Por otro lado, podría precisarse fórmulas más complicadas. Así, para calcular la superficie de la caja que se muestra en la figura adjunta es evidente que hay dos caras, arriba y abajo, de superficie x^2, mientras que las otras cuatro tendrán área xy. Por lo tanto, el área total será:

$$2x^2 + 4xy.$$

Esta es otra fórmula, con dos sumandos de grado dos. Otras figuras geométricas más complejas u otro tipo de problemas al margen de la geometría pueden requerir fórmulas con más términos o variables; al combinar números y variables mediante sumas y productos, se llaman «fórmulas algebraicas». A lo largo del siglo XIX se homogeneizaron las fórmulas, es decir, se transformaron para que todos los términos tuvieran el mismo grado y obtener una «forma» o «forma algebraica»; esto es, una fórmula en la que todos los términos o monomios tienen siempre el mismo grado. Por ejemplo:

— Formas de dos variables y grado 2:

$$\underbrace{2x^2}_{\text{grado 2}} + \underbrace{2xy}_{\text{grado 2}}, \quad \underbrace{5x^2}_{\text{grado 2}} + \underbrace{10xy}_{\text{grado 2}} - \underbrace{7y^2}_{\text{grado 2}} \quad \text{o} \quad -\underbrace{5x^2 - 6xy}_{\text{grado 2}} + \underbrace{7y^2}_{\text{grado 2}},$$

— Formas de tres variables y grado 4: $\underbrace{2x^4}_{\text{grado 4}} + \underbrace{6y^2z^2}_{\text{grado 4}} - \underbrace{8xy^3}_{\text{grado 4}} + \underbrace{y^4}_{\text{grado 4}}$.

En general, pueden considerarse formas del grado que se desee y con el número de variables que sea. Durante la época de Emmy Noether se desarrolló una nomenclatura especial para referirse a las formas algebraicas. Así, en lugar de llamarlas «formas» se las denominaba «cuánticos»; a las formas de dos variables, «binarias»; a las de tres, «ternarias»; a las de grado dos, «cuádricas»; a las de grado tres, «cúbicas», a las de grado cuatro, «cuárticas», etcétera. De este modo, el último ejemplo es un «cuántico cuártico ternario».

mo, es importante destacar que el trabajo realizado no fue inútil: más adelante, la combinación en la mente de Emmy Noether de las técnicas simbólicas junto con las nuevas herramientas abstractas de Hilbert generó el sólido cemento sobre el que se edificó lo que hoy se llama matemática moderna.

La abstracción en el uso de símbolos que no representan ecuaciones, números ni objetos concretos, y de los que finalmente solo importa las relaciones intrínsecas, conduce indefectiblemente a las estructuras algebraicas. Existe el consenso de que su uso generalizado en todas las ramas de las matemáticas tuvo un punto muy claro de partida: Emmy Noether.

ERLANGEN SE QUEDA PEQUEÑA

Emmy Noether postergó sus sueños y permaneció en la Universidad de Erlangen durante los siete años siguientes a la lectura de su tesis. Allí continuó trabajando sobre la teoría de invariantes y dio clases en el Instituto de Matemática en sustitución de su padre, al que la edad comenzaba a restar facultades. Además, impartió cursos vinculados con proyectos propios de investigación. Una vez terminado el doctorado, lo natural habría sido que preparara a conciencia su examen de habilitación, un requisito indispensable para ejercer como profesora titular. Sin embargo, esta opción estaba vedada a las mujeres y tuvo que conformarse con asistir a su padre sin salario alguno y ningún tipo de posición académica. Las universidades habían admitido a las mujeres como alumnas, pero no se las toleraba dentro del cuerpo docente.

El panorama de la investigación no se mostraba mucho más prometedor. Mientras Emmy Noether intentaba abrirse paso en aquella particular jungla de ecuaciones y cálculos, su padre, Gordan y la Universidad de Erlangen en pleno se habían enquistado en la vieja matemática algorítmica. Lejos de allí, en las universidades de Gotinga, Berlín y Zúrich, algunas figuras míticas trazaban las grandes avenidas por las que discurriría la nueva matemática: además de los citados Hilbert y Klein, Edmund Landau (1877-1938),

Carl Runge (1856-1927), Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) y Adolf Hurwitz (1859-1919), entre otros.

No es de extrañar que el aislamiento de Erlangen pasara factura a todos sus integrantes, anquilosados por una concepción cerrada a los cambios. Así, Emmy Noether, durante los tres años posteriores a la aprobación de su tesis, solo consiguió publicar un artículo, en el que simplemente ampliaba resultados. Aquello fue un desesperante paso más de la escalera de caracol que Gordan, con la mejor intención, había proyectado para ella.

Su historia podría haber terminado allí, y en la actualidad casi nadie la conocería. Sin embargo, hubo una constante en su vida que, finalmente, lo cambiaría todo y la elevaría a la categoría de genio: su indestructible pasión por las matemáticas. Ese amor, combinado con su personalidad y su férrea determinación, le proporcionaron la fuerza necesaria para sortear una y otra vez cualquier obstáculo. Mujer o hombre, con salario o sin él, lejos o cerca, daba igual... la necesidad de pensar matemáticas, de hacer matemáticas y, sobre todo, como ella misma gustaba de decir, de «charlar matemáticas», la impulsaba hacia delante sin esfuerzo aparente. Fue esta pasión matemática la que hizo imposible que se resignara y quedara atrapada en Erlangen.

La necesidad de dejar atrás su ciudad natal explica que desde sus primeros pasos en la universidad tejiera una particular trama de contactos, colegas y amistades con los que compartir y cultivar sus conocimientos de la disciplina. De esta forma, en 1908 pasó a ser miembro del Círculo Matemático de Palermo, por aquel entonces la más importante sociedad matemática internacional, con cerca de un millar de miembros. Un año después entró en la Sociedad Alemana de Matemáticas y participó en una charla sobre invariantes para formas con n variables que se celebró en la localidad austríaca de Salzburgo. A partir de entonces, acudió con frecuencia a estos acontecimientos y durante los primeros años fue la única mujer activa en las sesiones.

El destino quiso que no tardara más en dar sus primeros pasos fuera de Erlangen. Paul Gordan se jubiló en la primavera de 1910, aunque continuó colaborando con la universidad. Durante un tiempo impartió cursos junto a su primer sustituto, el matemático ale-

mán Erhard Schmidt (1876-1959), un reconocido alumno de Hilbert, y se retiró de manera definitiva de la docencia en 1911. Su sucesor fue el profesor y matemático austríaco Ernst Fischer (1875-1954), un hombre decisivo en la vida y trayectoria de Emmy Noether.

El viejo profesor falleció poco más tarde, en diciembre de 1912, a la edad de 75 años. Su pérdida entristeció profundamente a Emmy Noether, que jamás olvidó todo lo que hizo por ella. Desde entonces, en cualquier lugar al que llamase hogar, se cumplió siempre una condición: en un sitio de honor, figuraba un retrato de Paul Gordan.

EL SALTO AL PARAÍSO: GOTINGA

El nuevo mentor que precisaba Emmy Noether apareció como por arte de magia tras la rápida partida del primer sustituto de Gordan. Ernst Fischer venía de admirar otros paisajes y pronto le brindó la perspectiva que tanto necesitaba, y que su padre y su director de tesis no habían podido ofrecerle.

La influencia de Fischer sobre Noether fue decisiva. Además de poder intercambiar ideas y descubrir nuevos enfoques y problemas, con él se podía «charlar matemáticas» de manera grata y provechosa. Con su experiencia y consejos, Fischer transformó a una joven recién doctorada, brillante pero abandonada a su suerte en un viejo barco, en una respetada matemática con una interesante proyección y al timón de su propio proyecto científico.

A partir de su contacto con Fischer, Emmy Noether profundizó en el uso de las estructuras algebraicas abstractas y atendió al nuevo enfoque de Hilbert para el tratamiento de los invariantes. En 1913, durante su conferencia en el encuentro de la Sociedad Alemana de Matemáticas, celebrado ese año en Viena, la joven doctora dejó patente que iba en esta dirección, en lo que se perfilaba como una nueva y fascinante línea de investigación. En los años siguientes, sus publicaciones revelaron un cambio de tendencia que, a la postre, terminó posicionándola como una reconocida especialista en la aproximación moderna a la teoría de invariantes.

El salto más allá del pequeño reducto de la Universidad de Erlangen se presagiaba inminente.

A finales de abril de 1915, Hilbert y Klein propusieron a Emmy Noether que se desplazara a Gotinga y ejerciera como profesora. En esta decisión probablemente intervinieron varios factores; entre ellos, la amistad de ambos matemáticos con Max Noether y la posibilidad de atraer a un prometedor talento. No obstante, y con mayor seguridad, Hilbert y Klein actuaron movidos por su propio interés, dado que las matemáticas que pretendían desarrollar precisaban de un experto en teoría de invariantes. Y a esas alturas, Emmy Noether lo era.

> «Sobre todo, estoy en deuda con el señor E. Fischer, del cual recibí el impulso decisivo para estudiar álgebra abstracta desde un punto de vista aritmético, y esta continuó siendo la idea rectora de todo mi trabajo posterior.»
>
> — EMMY NOETHER.

En lo referente a la vertiente matemática, el salto resultaba superlativo, pero Emmy Noether lo aceptó sin titubeos. A fin de cuentas, tampoco tenía en Erlangen ninguna posición a la que aferrarse. Sin embargo, en el terreno profesional, las promesas no se dibujaban mejores en Gotinga, ya que de entrada solo se le ofrecía una posición como profesora sustituta, sin salario alguno. En cualquier caso, la invitación provenía de Hilbert y Klein: ningún matemático en su sano juicio la habría rechazado.

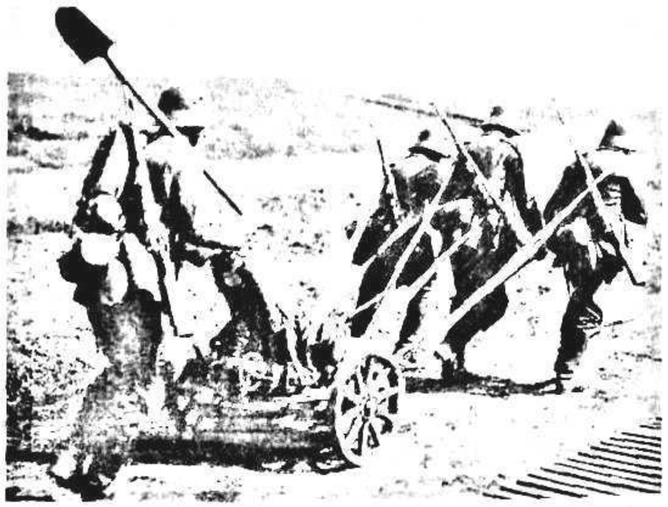
Los primeros pasos de Emmy Noether en la Universidad de Gotinga resultaron amargos: un par de semanas después de llegar al centro, su madre falleció. Al regresar a Erlangen no solo tuvo que afrontar esta pérdida tan repentina y dolorosa, sino que también comprobó que su padre estaba impedido y ya no podía valerse por sí mismo. Las idas y venidas entre Gotinga y Erlangen se convirtieron, así, en permanentes. De todos modos, Emmy Noether volvió a mostrar su fortaleza atendiendo a las personas a su alrededor y, al mismo tiempo, enfrentándose a las matemáticas de vanguardia.

LA GUERRA ROMPE EL VETO AL PROFESORADO FEMENINO

El 9 de noviembre de 1915, a unos seis meses de su llegada a la universidad, Emmy Noether intentó adquirir la condición de profesora titular y dictó ante la Sociedad Matemática de Gotinga su lección de habilitación «Sobre los enteros trascendentes». El acontecimiento contó con la oposición de no pocos académicos y arrojó un veredicto incontestable: la habilitación quedaba descartada «por no acogerse a los requisitos legales», es decir, solo se aceptaba a candidatos de sexo masculino. De nada sirvió la apelación que Hilbert dirigió al Ministerio de Cultura en la que, supuestamente, emitió su famosa objeción «Después de todo, esto es una universidad, no unos baños públicos». Tras este revés, Hilbert y Noether adoptaron una solución: él figuraría como titular de todo, pero en la programación oficial se leería «con la asistencia de Frl. Dr. E. Noether». Esta situación se mantuvo más de tres años. Sin embargo, la Primera Guerra Mundial no dejó un solo rincón de la sociedad alemana a salvo del drama de los movilizados, muertos y heridos, y la universidad no constituyó ninguna excepción. El drama bélico lo cambió todo. Las autoridades, acorraladas por la escasez de profesorado y los cambios sociales, flexibilizaron la legislación para que las mujeres accedieran a la carrera docente.

La habilitación definitiva de Emmy Noether

Así, el 23 de julio de 1918, Emmy Noether pudo intervenir de nuevo ante la Sociedad Matemática con la charla «Problemas variacionales invariantes». Una semana antes, esa misma disertación había sido presentada en su nombre por Felix Klein en el encuentro anual de la Sociedad de Ciencias de Gotinga. Finalmente, la facultad de Filosofía ofició su prueba de habilitación, que consistió en dos partes: la primera, un examen oral celebrado el 28 de mayo de 1919, y la segunda, una lección magistral, sostenida ante una comisión de la facultad el 4 de junio. Emmy Noether superó ambas pruebas y pudo impartir su primer curso como profesora titular en otoño de 1919.



Soldados del ejército alemán transportando artillería ligera en el transcurso de la Primera Guerra Mundial.

A los pocos meses de reintegrarse en la vida académica de Gotinga, se convenció a sí misma de que estaba allí por algo, que pronto se desencadenaría una revolución matemática. Ella misma lo definió en estos términos, que incluyó en una de sus frecuentes cartas a Fischer:

> La teoría de invariantes es la «cosa» aquí ahora. Incluso el físico Hertz está estudiando a Gordan... Hilbert planea hablar la próxima semana acerca de sus ideas sobre los invariantes diferenciales de Einstein, mejor que nuestra gente se prepare.

Sobre esa misma época confesó que formaba parte de un equipo que desarrollaba cálculos de la más alta dificultad para Einstein, aunque «ninguno de nosotros entendemos para qué son».

EL PROBLEMA DE LAS ECUACIONES DE CAMPO

Cabe preguntarse por qué estaban tan interesados Hilbert, Klein y otros miembros destacados de la élite de Gotinga por los invariantes y, sobre todo, qué papel jugaba Einstein en toda esta historia, después de haber formulado en 1905 su célebre teoría de la relatividad especial. Sin duda, el gran desafío era extenderla y conseguir explicar también los fenómenos gravitacionales. Llevado de este empeño, Einstein se embarcó desde 1907 en la ardua búsqueda de un marco que permitiera integrar la gravedad. Cinco años después, fue consciente de que la nueva teoría requeriría un complejo aparato matemático que incluso él mismo no dominaba en su totalidad.

Mientras tanto, Minkowski se había percatado de que la relatividad especial de Einstein se formulaba de forma mucho más consistente con el concurso de una geometría no euclídea en un espacio de cuatro dimensiones, lo cual fue conocido desde entonces como «espacio de Minkowski». Este planteamiento atrajo la atención de Hilbert y Klein hacia los problemas matemáticos conectados con la integración de la gravedad. En 1915, Einstein con-

siguió completar una versión de la ansiada extensión de su teoría inicial y formular la teoría general de la relatividad.

Sin embargo, existían problemas importantes en el planteamiento matemático de la nueva teoría, dada la dificultad para encontrar una descripción matemática convincente de las «ecuaciones de campo» del nuevo modelo físico. Consciente de estos problemas, aceptó la invitación de Hilbert para impartir seis charlas sobre relatividad general en Gotinga, que se impartieron entre junio y julio de 1915. Durante su estancia en Gotinga, Einstein se hospedó en la casa de Hilbert. La impresión mutua que se causaron fue formidable. Einstein encontró por fin a alguien que comprendía su teoría; de hecho, la entendía peligrosamente bien.

Aunque las ideas básicas de la relatividad general estaban ya formuladas, el problema de las ecuaciones de campo presentaba una envergadura colosal. Así, Einstein, decepcionado consigo mismo, reconoció a Hilbert en noviembre de 1915 que la versión que expuso en Gotinga ese verano contenía trabas insalvables. El ansia por alcanzar una solución satisfactoria impulsó a ambos a mantener una intensa correspondencia, al extremo de que Einstein solo escribió a dos personas durante ese mes de noviembre: a su exmujer y a Hilbert. Con este último, incluso diariamente, aunque temía que diese con la solución del problema y se coronara como el primero en cerrar de forma definitiva la teoría. De este modo, Einstein y Hilbert protagonizaron uno de los lances más apasionantes de la historia de la ciencia.

El principal problema de las ecuaciones de campo es que debían ser covariantes, esto es, dichas ecuaciones que representan las leyes de la física tenían que ser válidas para cualquier observador independientemente de su posición en el espacio y el tiempo, y por tanto serían ecuaciones invariantes por cualquier tipo de transformación de coordenadas. De forma más concreta, el problema principal era la conservación de la energía. La energía debía ser invariante y, dentro del marco teórico formulado por Einstein antes del 25 de noviembre de 1915, esto no se cumplía.

El enfoque de Hilbert para obtener las ecuaciones de la relatividad general difería del de Einstein. Hilbert pretendía

¿QUIÉN «GANÓ»? ¿EINSTEIN O HILBERT?

La pugna científica entre Einstein y Hilbert por dar con la solución al problema de las ecuaciones de campo casi acaba con la salud del propio Einstein, como él mismo reconocería años más tarde; tal fue la intensidad y la concentración extrema que le exigió competir con Hilbert. Aun hoy, el desenlace de la «carrera» no ha quedado resuelto. A lo largo de aquel fructífero mes de noviembre de 1915, tanto Hilbert como Einstein propusieron sus soluciones en sendas conferencias entrecruzadas desde Berlín y Gotinga. Finalmente, el 20 de noviembre de 1915, Hilbert presentó ante la Real Sociedad de Ciencias de Gotinga una propuesta de ecuaciones de campo, y cinco días más tarde, Einstein hizo lo propio frente a la Academia Prusiana. Los correspondientes artículos se publicaron más tarde: el de Einstein, el 2 de diciembre, mientras que el de Hilbert se demoró considerablemente, hasta marzo de 1916. Estas circunstancias alumbraron una gran polémica posterior y, hasta hace pocos años, la balanza se inclinaba del lado de Hilbert. Sin embargo, los materiales y las notas disponibles en la actualidad conducen a atribuir la victoria definitiva a Einstein. Según parece, Hilbert concedió de inmediato todo el mérito a Einstein, aunque siguió intentando obtener sus propias ecuaciones de campo mediante técnicas alternativas; quizá, creyendo que sería capaz de ir más lejos, de tocar el cielo con los dedos construyendo la teoría que unificara la gravedad, la materia y el electromagnetismo. Algo que, ni siquiera hoy, ha sido posible lograr.

Albert Einstein (izquierda) y David Hilbert (derecha) resolvieron de forma paralela los problemas matemáticos que llevaba implícitos la teoría general de la relatividad.

utilizar el principio de mínima acción de Hamilton para derivar las ecuaciones, con lo que dio una definición de acción dentro de la relatividad general que se conoce como «lagrangiano de Hilbert-Einstein» y que hoy en día se acepta como la formulación variacional, o de mínima acción, correcta para la teoría de Einstein.

LA CONTRIBUCIÓN DE EMMY NOETHER

Probablemente, Emmy Noether no estuvo presente durante los días en que Einstein impartió sus charlas en Gotinga, puesto que la muerte de su madre la hizo regresar precipitadamente a Erlangen ese verano de 1915. Sin embargo, es evidente que Hilbert la había reclutado como parte del escuadrón para asaltar las ecuaciones de campo de Einstein. Él confiaba en que su experiencia en la teoría de invariantes algebraicos y diferenciales, ya suficientemente acreditada a esas alturas, resultaría clave para resolver los problemas sobre conservación de la energía que planteaba la relatividad general. No se equivocó en absoluto.

Motivada por los planteamientos de Hilbert y Klein, Emmy Noether dio solución al enigmático comportamiento relativista de la energía y formuló lo que hoy en día se conoce en física como «teorema de Noether». Sus resultados fueron recogidos en un artículo publicado en 1918 por la Real Sociedad de Ciencias de Gotinga, que constituyó la parte principal de su tesis de habilitación y fue incluso elogiado por Einstein, en una de las numerosas cartas que dirigió a Hilbert.

El planteamiento de Emmy Noether ofreció un marco general que permite comprender los teoremas de conservación en física más allá del caso concreto de la física relativista. Años más tarde, el físico y matemático turco Feza Gürsey (1921-1992) lo resumió con estas palabras:

> Antes del teorema de Noether, el principio de conservación de la energía estaba rodeado de misterio... La formulación matemática simple y profunda de Noether hizo mucho para desmitificar la física.

Es importante recalcar que las investigaciones que Emmy Noether realizó de la mano de Hilbert y Klein caían fuera de su auténtico campo de interés, el álgebra. Tras su habilitación, apenas había escrito un par de artículos más sobre el tema: estaba llamada a ser la fundadora del álgebra abstracta moderna, a la que dedicaría el grueso de sus trabajos. El vertiginoso huracán que Einstein y Hilbert generaron a su alrededor la arrastró a trabajar sobre estas cuestiones, lo que dio fruto a uno de los resultados más bellos de la física matemática, con un amplio significado tanto teórico como práctico.

> «Ayer recibí de la señorita Noether un artículo muy interesante sobre formas invariantes. Estoy muy impresionado de que alguien pueda comprender estos temas desde un punto de vista tan general. No haría ningún daño a la vieja guardia de Gotinga aprender una o dos cosas de ella...»
>
> — ALBERT EINSTEIN.

LOS INVARIANTES

Un invariante en matemáticas implica un grupo de cambios y algo que se mantiene fijo bajo el efecto de esos cambios y que revela propiedades importantes de aquello que se desea estudiar. Es propio del estilo matemático edificar lo siguiente sobre lo que se hizo antes. Al efecto, se rescatan aquí los conjuntos de números que tanto disgustaron a Kronecker en el capítulo anterior. El más incómodo de todos ellos, el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, es el adecuado.

$\mathbb{R}$ es el modelo matemático de una recta, de una regla de medir, similar a la que guarda cualquier escolar en su estuche, solo

que $\mathbb{R}$ es infinitamente largo por ambos extremos. Sin embargo, los acontecimientos que se observan en la vida cotidiana no se desarrollan en una recta, ya que el mundo tiene tres dimensiones en el espacio —si bien se utiliza ocasionalmente un papel o una pantalla, que son objetos planos, para representar un mapa o una foto—. Por ello, es necesario que haya modelos matemáticos para el plano y el espacio que permitan describir con precisión los fenómenos de la realidad.

Un par ordenado de números reales se denota en matemáticas escribiendo entre paréntesis los números del par separados por comas. Por ejemplo, (3, 2), (−1, 2), (3, −1), (2 123, $\sqrt{2}$), (0, 0) son pares ordenados, y es evidente que hay muchos más, infinitos más, que forman un nuevo conjunto que se denota $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$ o bien, abreviadamente, $\mathbb{R}^2$. Es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\} = \{(3, 2), (-1, 2), (3, -1), (2\,123, \sqrt{2}), (0, 0) \ldots\}$$

Finalmente, debería escribirse:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\} = \{(x, y) \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^2$ está formado por todos los infinitos pares (x, y) que se obtienen al ir sustituyendo las variables x e y, cada una, por un número real.

De la misma manera pueden considerarse grupos de tres números reales puestos en orden. En ese caso se tendrán cosas del tipo (3, 2, 1), (3, −2,2) o (3, −2, −1). Una vez más, habrá ternas infinitas de este tipo que, juntas, forman un conjunto que se denota $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$ o bien, abreviadamente, $\mathbb{R}^3$. También se pueden considerar:

— Grupos de 4 números reales (3, 2, 1, 2), (−2, 3/7, 123, 4) o (6, 4, 0, 2), ... que juntos forman un conjunto que se denota abreviadamente R^4.
— Grupos de 5 números reales como (2, −1, 0, 3, 7), (6, 4, −13/5, 1, −1,4) o (3, 0, 0, $\sqrt{3}$, 4), ... que juntos forman un conjunto que se denota abreviadamente $\mathbb{R}^5$, etcétera.

REPRESENTACIÓN EN UN PLANO

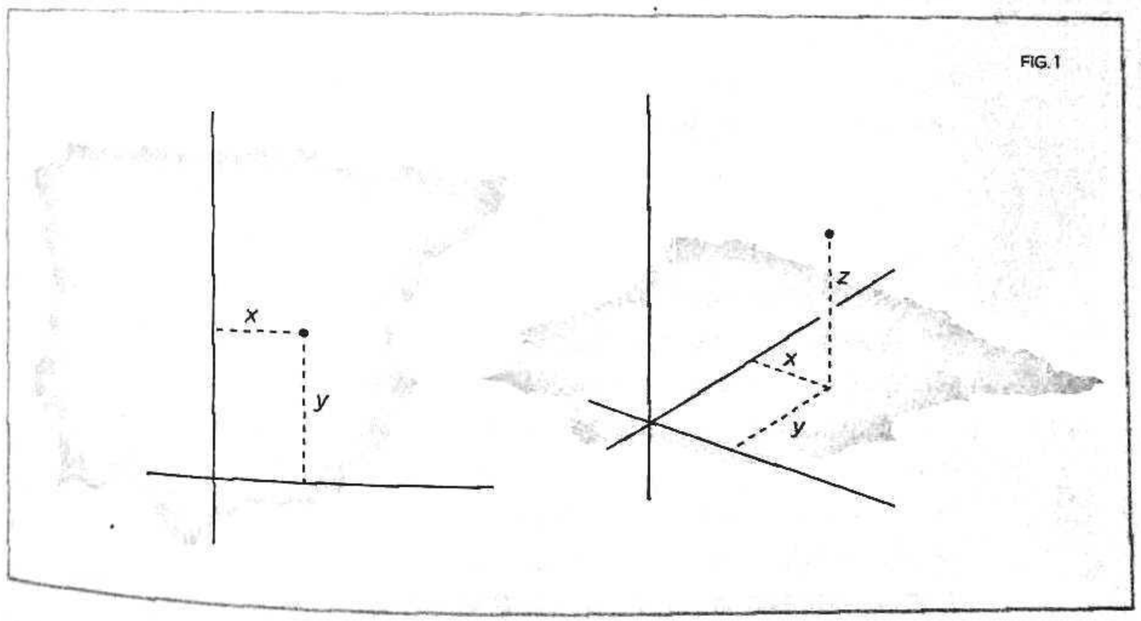
Se sabe que $\mathbb{R}$ puede ser representado gráficamente mediante una recta. Lo mismo sucede para $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, que también tienen interpretaciones geométricas o físicas sencillas.

$\mathbb{R}^2$ es completamente análogo a dar las coordenadas de un punto en un mapa. Por ejemplo, se emplea aquí el de la península Ibérica. Para plasmar gráficamente un elemento (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, se debe imaginar la posición de un avión sobre ese mapa, ya que el último número o coordenada, z, indica la altura. Puesto que dicho avión se hallará en una posición (x, y, z) en un momento concreto t, se utiliza el elemento (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ para reunir toda la información posición-tiempo de un objeto que se desplaza.

En resumen, se tiene que:

— $\mathbb{R}$ es el modelo matemático de la recta.
— $\mathbb{R}^2$ es el modelo del plano.
— $\mathbb{R}^3$ es el modelo matemático para el espacio.
— $\mathbb{R}^4$ es el espacio-tiempo.

Por su parte $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$ ... serían espacios de dimensión superior, sin representación gráfica sencilla.



FIGURAS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

El plano o el espacio ideales que se han modelado con $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ contendrán figuras que también serán modelo de problemas y objetos de la realidad. Sin embargo, en matemáticas, cuando se intenta indicar qué figura es la que se desea estudiar, debe hacerse de modo totalmente preciso y sin ambigüedades. Una de las técnicas principales para ello consiste en el uso de fórmulas y ecuaciones.

Ya se sabe que una fórmula es una expresión matemática en la que aparecen datos desconocidos. Suele interesar que una fórmula tome un valor concreto y determinar entonces para qué datos de las variables desconocidas se alcanza ese valor. Así, paralelo al concepto de fórmula surge inmediatamente el de ecuación cuando se iguala una fórmula a un número. Por ejemplo, la expresión x^2+y^2 es una fórmula con dos variables. Si interesa averiguar para qué valores de x e y se alcanza el valor 1, se escribirá la ecuación:

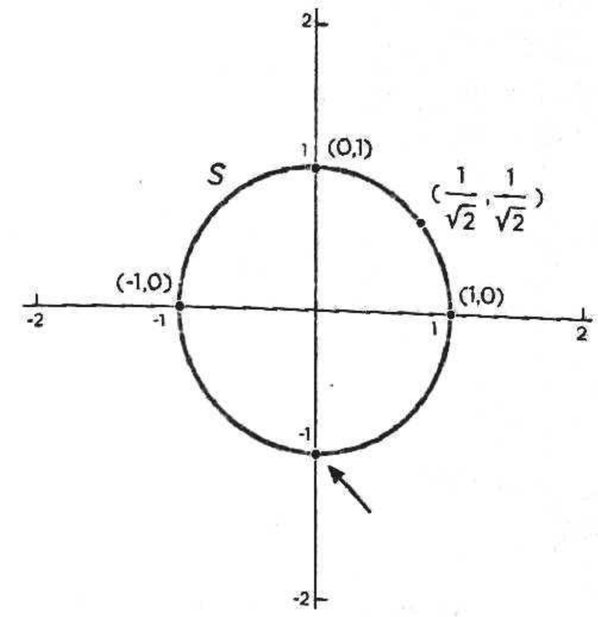
$$x^2+y^2=1.$$

Resolver esta ecuación supone encontrar los valores de x y y que cumplen la igualdad. Cada solución tendrá dos números, uno para x y otro para y. Por tanto, será algo del tipo (x, y), es decir, un elemento de $\mathbb{R}^2$. Casi sin realizar ningún cálculo puede comprobarse que $(1, 0)$ es solución de la ecuación, ya que sustituyendo x por 1 e y por 0 en la ecuación, esta se cumple:

$$\underbrace{1^2}_{x=1}+\underbrace{0^2}_{y=0}=1.$$

Sin embargo, esta ecuación tiene más soluciones, ya que es igualmente fácil comprobar que $(0, 1)$, $(-1, 0)$ o $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, e incluso otras muchas, son también soluciones. Todas ellas forman un conjunto al que puede llamarse S, que estará dentro de $\mathbb{R}^2$, dentro del plano. Se podría pensar que este conjunto S ha de ser extremadamente complicado, ya que contendrá los pares que se acaban de indicar y, en realidad, infinitos más. Si todos ellos se representan en el plano, se obtiene la figura 2:

FIG. 2



Se destacan con mayor tamaño los puntos correspondientes a los cuatro pares que ya se habían señalado más arriba. La figura que aparece es una circunferencia centrada en el origen de radio 1 y contiene todas las soluciones de la ecuación. Cualquier punto que se tome en la figura es un par que corresponde a una solución. Por ejemplo, si se considera el punto $(0, -1)$ señalado en el gráfico por la flecha, está claramente dentro de la figura y, por tanto, será solución, ya que si se toma $x=0$ e $y=-1$, la ecuación se satisface. Todo esto se indica de forma abreviada escribiendo:

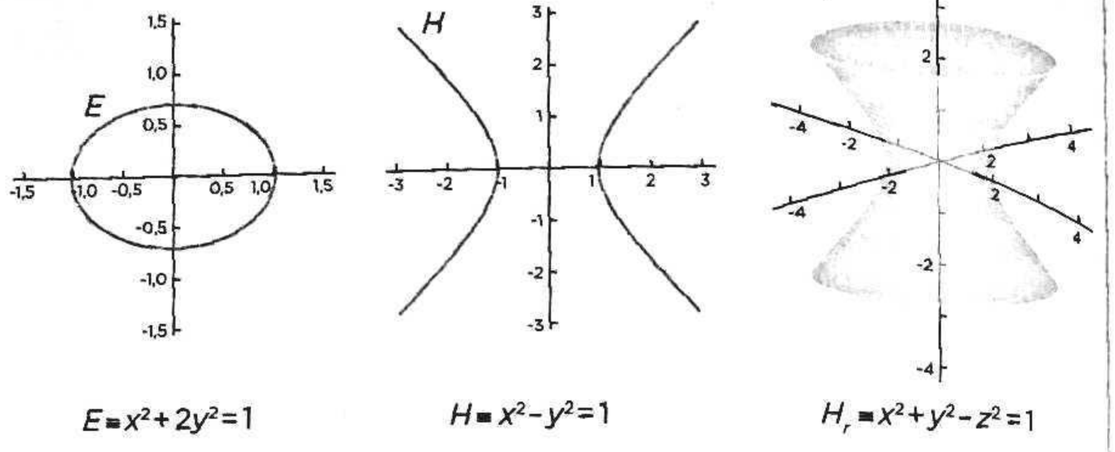
$$S \equiv x^2+y^2=1$$

lo que simboliza que se ha llamado S a la figura del plano (dos variables $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ el plano), que se obtiene representando las soluciones de la ecuación.

Por tanto, cada ecuación, al representar sus soluciones, permite describir una figura geométrica. El número de variables indicará si la figura está en $\mathbb{R}^2$ —es decir, en el plano—, para dos variables, o en $\mathbb{R}^3$ —el espacio—, para tres variables. Esta técnica se utiliza ampliamente en matemáticas y hay multitud de ejemplos como los que se muestran a continuación de figuras del plano o el espacio descritas mediante unas ecuaciones o, mas técnicamente, unas «ecuaciones implícitas».

En la figura 3, la primera figura es lo que se denomina una elipse; la segunda, una hipérbola, y ambas tienen ecuaciones implícitas con dos variables y por tanto son figuras del plano. La

FIG. 3



tercera es un hiperboloide y se trata de una figura del espacio, ya que en su ecuación aparecen tres variables.

Esta conexión entre fórmulas, formas, ecuaciones y figuras del plano o el espacio resulta esencial. Es la base de varias ramas de las matemáticas, como la geometría algebraica, y se aplica de continuo en la física o el diseño gráfico. Aquí se emplea para presentar la idea de invariante algebraico de forma gráfica e intuitiva.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EL ESPACIO

Tanto en el plano como en el espacio se pueden aplicar ciertas transformaciones que, a fin de cuentas, corresponden a fenómenos que se observan a diario en el mundo real. Trasladar un objeto de un lugar a otro, girarlo o estirarlo son operaciones básicas que, de distintos modos, se experimentan continuamente. Desde el punto de vista matemático, estas transformaciones se representan mediante la ayuda de aplicaciones. Se puede reutilizar las que sirvieron en el capítulo 1 para comparar el tamaño de dos conjuntos. Una traslación consiste en desplazar a un tiempo todos los puntos del plano, la misma distancia y en la misma dirección, como muestra la figura 4.

Bastará saber adonde se traslada el punto origen para determinar por completo dónde terminarán el resto de los puntos del plano, ya que a cada uno de ellos se sumará el mismo desplazamiento horizontal y vertical. Si se ha trasladado el origen al punto $u = (2,4)$, en todos los demás puntos del plano también se aplicará el mismo desplazamiento de 2 unidades en la primera coordenada y 4 en la segunda. La traslación será entonces la aplicación:

$$T_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T_u(x,y) = (x+2, y+4) = (x,y) + u.$$

Se dice entonces que esta traslación tiene un «vector de traslación» $u = (2,4)$. Efectivamente, estas fórmulas proporcionan la aplicación que realiza la traslación
que aparece en el gráfico y desplaza todos los objetos del plano según indica la flecha o vector que señala u. Así, la circunferencia inicial del gráfico queda transformada al aplicar T_u en la circunferencia desplazada y se denota $T_u(S)$. En realidad, si se está en el espacio e igualmente se mueve el origen a un punto v de $\mathbb{R}^3$, que será el vector de traslación, la traslación correspondiente tendrá asimismo la forma:

$$T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$T_v(x,y,z) = (x,y,z) + v$$

y, por tanto, la misma idea es válida tanto para el plano como para el espacio. Si se modifica el punto u o v adonde se traslada el origen, esto es, el vector de traslación, se obtendrán muchas otras

FIG. 4

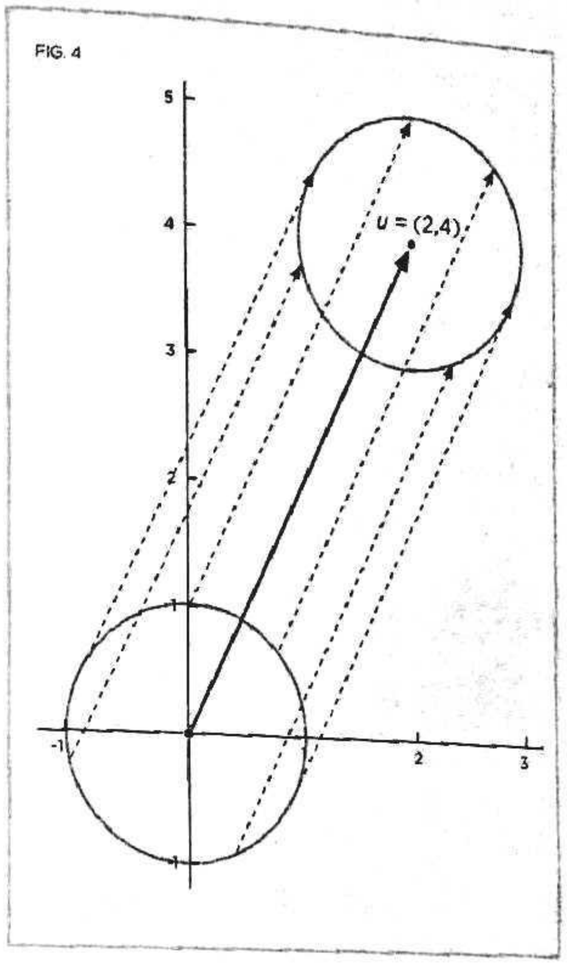
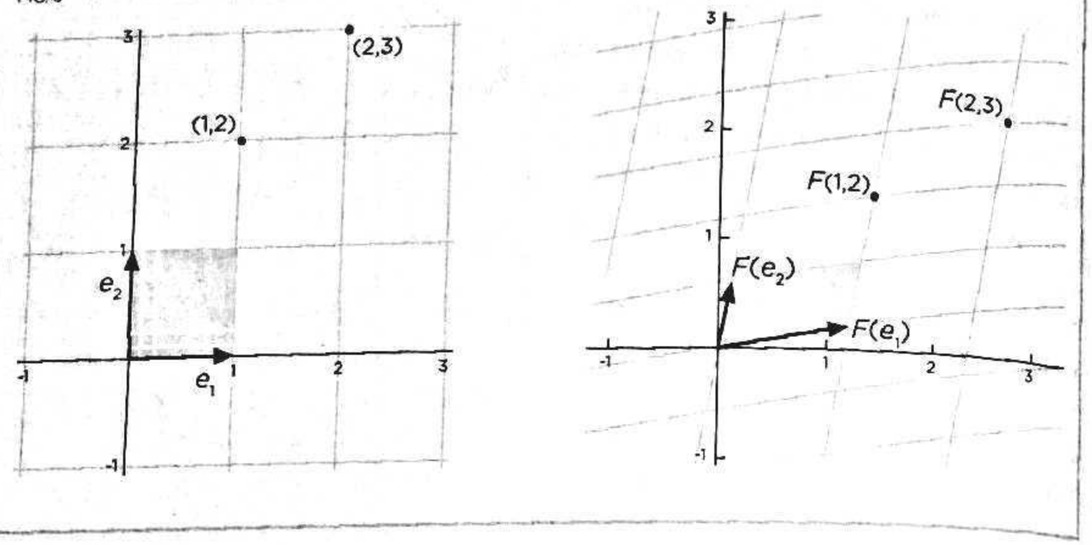


FIG. 5



traslaciones diferentes y, por ello, las traslaciones forman un grupo de transformaciones del plano y del espacio.

TRANSFORMACIONES LINEALES

Otro tipo importante de transformación son las denominadas «transformaciones lineales», entre las que se encuentran los giros, las rotaciones y los estiramientos. En una transformación lineal, basta con saber cómo se modifican los puntos o vectores básicos: el resto de los puntos se transformarán en consecuencia. Por ejemplo, en la figura 5, considérense los vectores básicos $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ y tómese la aplicación lineal F:

$$F: R^2 \to R^2$$
$$e_1 \to F(e_1) = (1{,}2,\ 0{,}2)$$
$$e_2 \to F(e_2) = (0{,}1,\ 0{,}6).$$

Como puede apreciarse, en la definición solo aparecen las flechas correspondientes a e_1 y e_2, es decir, solo se sabe cómo se transforman esos dos puntos. Sin embargo, al tratarse de una apli-

FOTO SUPERIOR:
Vista del actual Departamento de Matemáticas de la Universidad de Gotinga, donde Emmy Noether trabajó con Hilbert y Klein.

FOTO INFERIOR:
Edificaciones características del casco histórico de Gotinga, la ciudad en la que Emmy Noether vivió gran parte de su vida.

cación lineal, este dato es suficiente: lo que hace F es deformar la cuadrícula que inicialmente es perpendicular y la adapta según las nuevas direcciones que marcan $F(e_1)$ y $F(e_2)$. Por ejemplo, el punto $(2,3)$ en la cuadrícula inicial se alcanza dando dos pasos en la dirección de e_1 y tres en la dirección de e_2, es decir, $(2,3)=2e_1+3e_2$. La aplicación F lo transformará en el punto $F(2,3)$ que ocupa la misma posición pero en la nueva cuadrícula deformada, de modo que se alcanza dando dos pasos en la dirección de $F(e_1)$ y tres en la de $F(e_2)$, es decir, $F(2,3)=2F(e_1)+3F(e_2)$.

En general, para cualquier punto del plano, (x, y), se tendrá igualmente $(x, y)=xe_1+ye_2$, y de la misma manera podrá calcularse:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= xF(e_1) + yF(e_2) \\ &\quad \text{(sustituyendo el valor de } F(e_1) \text{ y } F(e_2)) \\ &= x(1{,}2,\ 0{,}2) + y(0{,}1,\ 0{,}6) \\ &= (\underbrace{1{,}2x+0{,}1y}_{=x_F},\ \underbrace{0{,}2x+0{,}6y}_{=y_F}) \end{aligned}$$

$$(x,y) \to (x_F, y_F).$$

Con ello, se pueden obtener fácilmente estas fórmulas que permiten calcular cómo actúa F para cualquier punto (x, y) y que dicen que F transforma las coordenadas iniciales, (x, y), en otras nuevas, (x_F, y_F), mediante las fórmulas obtenidas.

En realidad, para una aplicación lineal genérica, L, el mismo razonamiento será válido y si se conoce $L(e_1)=(\alpha_1,\beta_1)$ y $L(e_2)=(\alpha_2,\beta_2)$, la fórmula de L será:

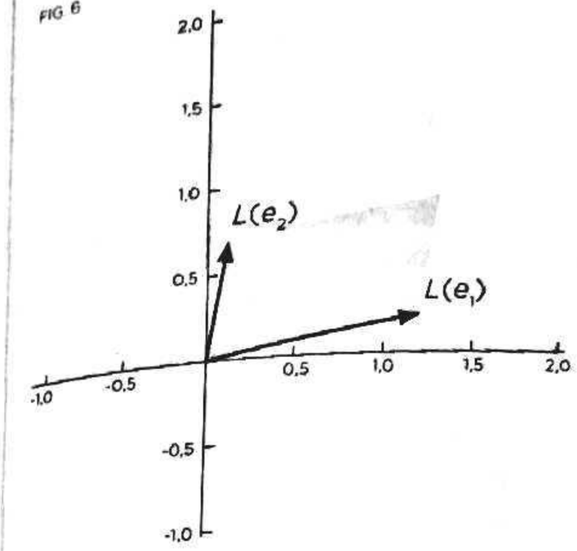
$$L(x, y)=(\alpha_1 x + \alpha_2 y,\ \beta_1 x + \beta_2 y).$$

O lo que es lo mismo:

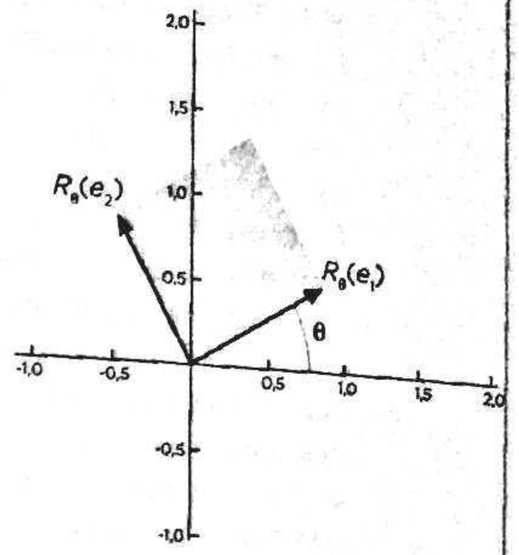
$$(x,y) \overset{L \text{ transforma}}{\longrightarrow} (x_L, y_L)$$

$$\text{con} \begin{cases} x_L = \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ y_L = \beta_1 x + \beta_2 y \end{cases}$$

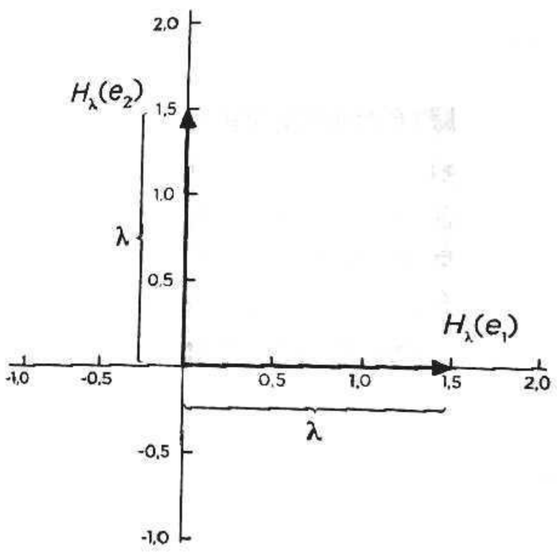
FIG 6



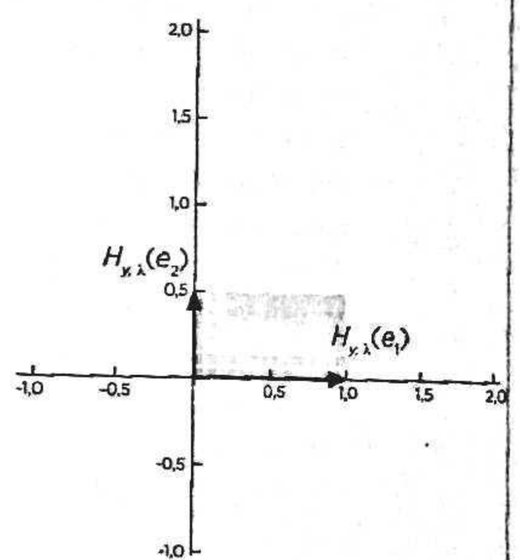
Aplicación lineal genérica L.



Rotación de ángulo θ, R_θ
(en el gráfico $\theta=\pi/6$, $R_{\pi/6}$)



Dilatación de escala λ, H_λ
(en el gráfico, λ=1,5, $H_{1,5}$)



Contracción de escala λ en el eje y
(en el gráfico, λ=1/2, $H_{y,1/2}$)

Del mismo modo, una aplicación lineal de $L: R^3 \to R^3$ será una transformación del espacio y bastará conocer cómo actúa sobre los tres puntos o vectores básicos, que ahora serán $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Así se tiene:

$$(x,y,z) \overset{L \text{ transforma}}{\longrightarrow} L(x,y,z)=(x_L,y_L,z_L)$$

$$\left.\begin{aligned} L(e_1)&=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\\ L(e_2)&=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\\ L(e_3)&=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)\end{aligned}\right\} \text{ entonces con } \begin{cases} x_L=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z\\ y_L=\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z\\ z_L=\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z\end{cases}$$

De la misma manera podrían considerarse también aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, etcétera. Las aplicaciones lineales recogen muchos casos de transformaciones importantes del plano o el espacio. En el plano se tienen aplicaciones lineales genéricas como L, pero también casos más específicos, como el grupo de las rotaciones que, para un ángulo de giro θ medido en radianes y en sentido antihorario, se denotan $\mathbb{R}_\theta$; las dilataciones y contracciones, o más técnicamente homotecias, que estiran o encogen el plano un factor λ y que se denotan H_λ y muchas otras.

Es evidente que el cuadrado de lado 1 que forman e_1 y e_2 se convertirá, después de aplicar la transformación, en una nueva figura, que en la figura 6 se ha sombreado en cada caso. El cuadrado inicial tiene área 1, pero tras la transformación, dependiendo de cómo sea esta, su tamaño podrá crecer o disminuir. El área del cuadrado transformado es una buena medida de cómo la aplicación modifica los tamaños y se denomina «determinante de la aplicación» —de forma abreviada, «det»—. Si su valor absoluto sigue siendo 1, indicará que no se modifican los tamaños; si es mayor que 1, los hará crecer, y si es menor que 1, disminuirá. Al observar los gráficos se observa que:

$$\det(\mathbb{R}_\theta)=1, \text{ y también, } \det(H_\lambda)=\lambda^2.$$

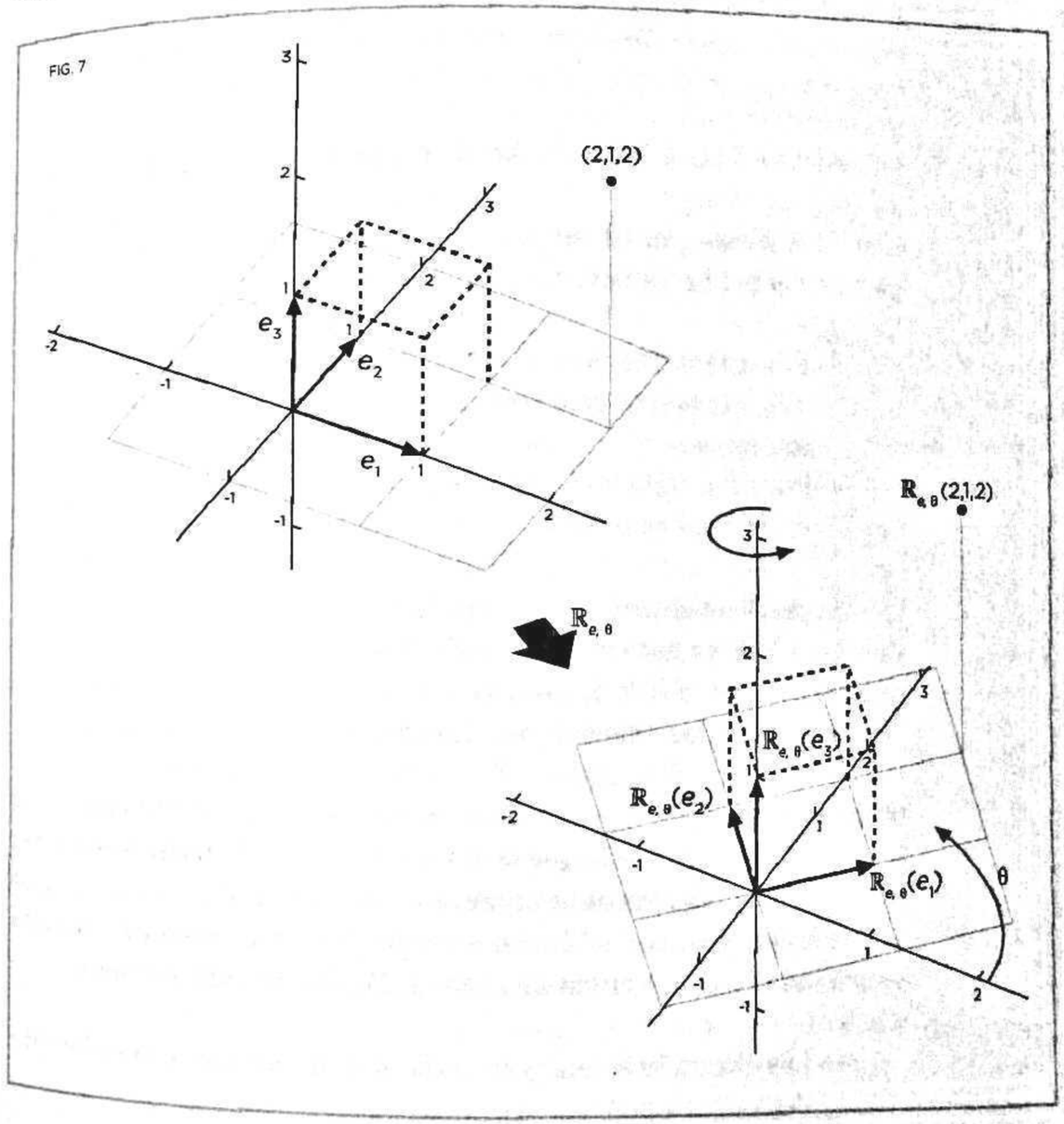
Por tanto, el grupo de las rotaciones, $\mathbb{R}_\theta$, no importa cuál sea el ángulo θ, mantiene el área de los objetos mientras que el grupo de las homotecias, H_λ, hará que crezca para $\lambda>1$ y que decrezca para $0<\lambda<1$. En general, para una aplicación lineal L en el plano se dispone de esta sencilla fórmula para el cálculo del determinante:

$$\det(L)=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

mediante la cual es fácil comprobar que, por ejemplo, $\det(F)=0{,}7<1$ y por tanto F hace disminuir las áreas de las figuras geométricas.

De la misma manera, se dispondrá de rotaciones o dilataciones en el espacio, como se muestra en la figura 7. Para indicar una rotación en el espacio se necesita especificar la dirección del eje de giro mediante un punto o vector y el ángulo de giro; así, en el gráfico se observa una rotación, $\mathbb{R}_{e_3,\theta}$, de ángulo θ tomando como eje de giro el marcado por e_3. Para las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ también se puede definir el determinante, que en

FIG. 7



este caso es el volumen de la figura —paralelepípedo— formado por los vectores básicos después de aplicar la transformación. En la rotación del gráfico resulta evidente que $\mathbb{R}_{e_3,\theta}(e_1)$, $\mathbb{R}_{e_3,\theta}(e_2)$ y $\mathbb{R}_{e_3,\theta}(e_3)$ forma un cubo de lado 1 y su volumen es, por tanto, 1. Con lo cual, resulta:

$$\det(\mathbb{R}_{e_3,\theta}) = 1,$$

lo que indica que las rotaciones no modifican el tamaño de los objetos del espacio.

INVARIANTES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

Llegados a este punto, se dispone ya de los dos elementos que permitirán hablar de invariantes en el plano y el espacio:

— Por una parte, hay objetos, circunferencias, paraboloides, etcétera, que son dados mediante sus ecuaciones implícitas.
— Por otra, transformaciones representadas mediante aplicaciones lineales.

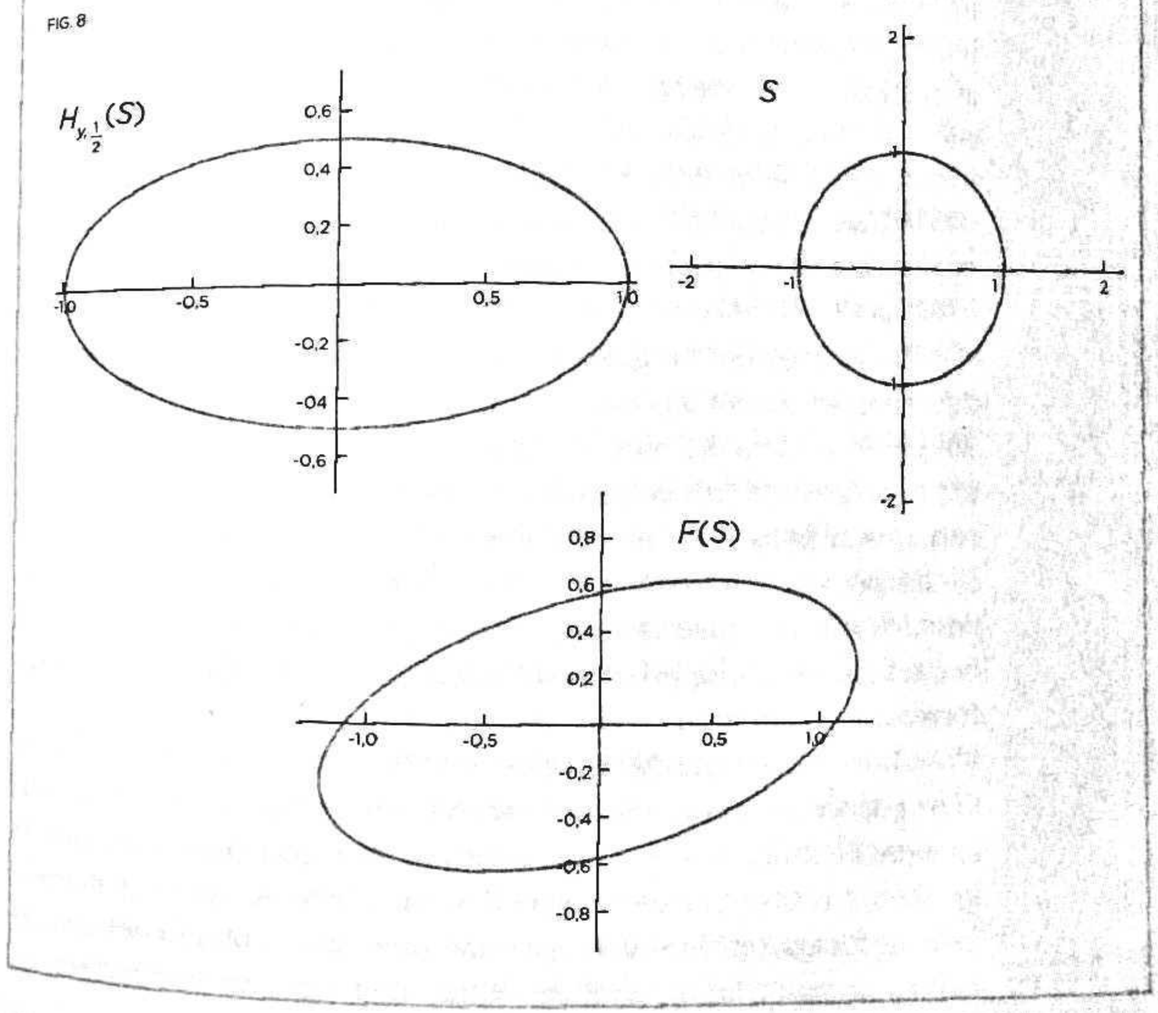
Se puede empezar considerando una circunferencia del plano, por ejemplo la ya familiar $S \equiv x^2 + y^2 = 1$, y aplicándole una traslación, que será T_u con $u = (2, 4)$ para reutilizar todos los ejemplos de las páginas anteriores. Puede apreciarse la representación de este proceso en la figura 4. Al aplicar T_u, la circunferencia S se transforma en otra figura, $T_u(S)$. No obstante, si se observa el gráfico para esta transformación, es obvio que la nueva figura $T_u(S)$ sigue siendo una circunferencia del mismo tamaño que S. En realidad, da igual si se traslada S al punto $u = (2, 4)$ o a cualquier otro: siempre seguirá siendo una circunferencia de radio 1. Dicho de otra manera:

— Las circunferencias y su radio son invariantes por el grupo de traslaciones.

Es fácil imaginar que si a continuación se aplicara cualquier rotación, $\mathbb{R}_\theta$, con, por ejemplo, $\theta = \pi/2$, transformará también $T_u(S)$ en otra figura $\mathbb{R}_\theta(T_u(S))$ que a todas luces será otra circunferencia de radio 1. Las combinaciones de traslaciones y giros son un grupo de transformaciones que se denominan, tanto en el plano como en el espacio, «movimientos rígidos», ya que respetan el tamaño, forma y orientación de los objetos sin producirles ninguna dilatación o estiramiento. En resumidas cuentas, se puede afirmar que:

— Las circunferencias y su radio son invariantes por el grupo de movimientos rígidos.

FIG. 8



— Esto mismo podría decirse exactamente de las hipérbolas o, ya en el espacio, de hiperboloides, esferas y otras figuras.

CONCEPTOS RELACIONADOS

El terreno de las invariantes reúne muchos conceptos más. Por ejemplo, si se toma la circunferencia S y se le aplica una transformación lineal cualquiera, no necesariamente será un movimiento rígido; ahora se obtendrá una figura diferente. En el caso de utilizar la aplicación lineal F o la contracción en el eje y, $H_{y,1/2}$, que aparecen en la figura 8, se tendrá:

A pesar de que S se transforma, siempre se obtiene una elipse. En realidad, las circunferencias son también elipses, de modo que una transformación lineal de una elipse siempre proporcionará otra elipse; más o menos estirada, girada o no, pero elipse. Con ello se ha descubierto otro invariante:

— Las elipses son invariantes por el grupo de las aplicaciones lineales, con determinante distinto de cero.

Un estiramiento o giro puede transformar una elipse en otra diferente, ya que ambas son figuras del mismo tipo, cerradas y con un solo trazo. Resulta más difícil imaginar que se pueda estirar una elipse hasta convertirla en una hipérbola, ya que estas otras ni son cerradas, ni presentan un solo trazo —tienen dos trazos o ramas—. De hecho, es totalmente imposible, porque las transformaciones lineales llevan elipses en elipses e hipérbolas en hipérbolas. Es decir, también las hipérbolas son invariantes por el grupo de transformaciones lineales.

Cabe señalar que darse cuenta de tanta invariancia en los gráficos parece un paseo triunfal, pero no lo es, ni mucho menos: si en lugar de gráficos se hubiera contado solo con las ecuaciones de las distintas transformaciones de S, las cosas se habrían complicado de forma considerable. En cualquier caso, obtener estas ecuaciones no es difícil y, además, estas tres figuras se escriben en

términos de formas de dos variables y grado dos, es decir, las «cuádricas binarias» que estudió Paul Gordan, como puede verse a continuación:

Las ecuaciones de las tres figuras, una vez simplificadas y prescindiendo de la notación con subíndices —es decir, en lugar de x_1, y_1, x_F, y_F se escribe simplemente x, y—, son:

$$S \equiv x^2 + y^2 = 1$$
$$F(S) \equiv 40x^2 + 145y^2 - 60xy = 49$$
$$H_{y,1/2}(S) \equiv x^2 + 4y^2 = 1.$$

Efectivamente, todas las fórmulas involucradas son formas homogéneas de grado dos. Al observar los gráficos, se advierte que S, $F(S)$ y $H_{y,1/2}(S)$ son elipses. Pero si se dispusiera únicamente de estas tres ecuaciones, no quedaría tan claro qué tipo de figura es cada una. A fin de cuentas, sería una insensatez que a la vista de algo como $40x^2 + 145y^2 - 60xy = 49$, se exclamase: «¡Elipse, elipse!».

Sin duda, reconocer la forma de una figura a partir de su ecuación no es una tarea fácil. De nuevo, la invariancia ofrece una ayuda inestimable, ya que no solo las figuras pueden ser invariantes: afortunadamente también lo son ciertos cálculos, que revelarán las propiedades que no son evidentes a simple vista. El ejemplo más claro de esto es lo que se denomina «discriminante de una forma» o de una ecuación asociada a una forma.

Tal y como se anunció antes, las ecuaciones de las tres figuras S, $F(S)$ y $H_{y,1/2}(S)$ se escriben mediante formas de grado dos, es decir, son todas ellas del tipo:

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + 2Cxy}_{\text{forma de grado 2}} = k.$$

El discriminante de una forma como esta se denota Δ y se calcula mediante una sencilla fórmula:

$$\Delta\,(Ax^2 + By^2 + 2Cxy) = AB - C^2.$$

Gracias a esta fórmula, resulta directo calcular:

$$S \to \Delta(x^2+y^2) = 1\cdot 1 - 0 = 1,$$
$$F(S) \to \Delta(40x^2+145y^2-60xy) = 40\cdot 145 - 60^2 = 2\,200,$$
$$H_{y,1/2}(S) \to \Delta(x^2+4y^2) = 1\cdot 4 - 0^2 = 4.$$

Lo esencial aquí consiste en que el discriminante es, en sí, un invariante por el grupo de aplicaciones lineales. De forma más precisa, del mismo modo que se ha realizado antes para obtener $F(S)$ y $H_{y,1/2}(S)$ a partir de S, una aplicación lineal L transformará la forma cuadrática:

$$Ax^2+By^2+2Cxy,$$

en otra diferente:

$$A_Lx_L^2+B_Ly_L^2+2C_Lx_Ly_L,$$

$$Ax^2+By^2+2Cxy \xrightarrow[(x,y)\to_L(x_L,yL)]{} A_Lx_L^2+B_Ly_L^2+2C_Lx_Ly_L,$$

y entonces se cumple que:

$$\underbrace{\Delta(Ax^2+By^2+2Cxy)}_{\text{discriminante inicial}} = \det(L)^2\,\underbrace{\Delta(A_Lx_L^2+B_Ly_L^2+2C_Lx_Ly_L)}_{\text{discriminante tras la transformación } L}.$$

Es decir, tras aplicar la transformación, el discriminante varía únicamente en el factor $\det(L)^2$ y, de este modo, varía pero lo hace de forma controlada. A fin de cuentas, esta identidad resuelve el problema, ya que $\det(L)^2>0$ y lo que sí que permanecerá exactamente igual antes y después de la transformación es el signo del discriminante: si al principio era positivo, seguirá siéndolo tras aplicar L. He aquí pues un nuevo invariante:

— El signo del discriminante es invariante por el grupo de aplicaciones lineales (con determinante no nulo).

Los dos ejemplos básicos de las figuras que pueden obtenerse con formas cuadráticas ya se representaron anteriormente con gráficos y son la esfera/elipse $S \equiv x^2+y^2=1$ y la hipérbola $H \equiv x^2-y^2=1$. El discriminante de la primera es $\Delta(x^2+y^2)=1>0$, y el de la segunda, $\Delta(x^2-y^2)=-1<0$. Si se usan aplicaciones lineales puede transformarse S en cualquier otra elipse, pero el signo de su discriminante es invariante y, por tanto, deberá ser positivo. Todas las elipses tienen discriminante positivo y todas las hipérbolas, por el mismo motivo, negativo. No importa cuán extraña sea una forma cuadrática, se descubrirá si es elipse o hipérbola simplemente calculando el discriminante, sin necesidad de representarla.

UNA «CACERÍA DE INVARIANTES»

Los ejemplos que se han citado y desarrollado hasta ahora ponen de manifiesto la importancia matemática de la invariancia. Su valor principal reside en que revela las propiedades esenciales de las figuras y objetos matemáticos, lo cual permite clasificarlos y, posteriormente, estudiar sus propiedades. La aplicación de invariantes resultó trascendental para la geometría proyectiva, el álgebra, la geometría algebraica y otras tantas disciplinas matemáticas.

Todo ello justificó que el siglo XIX matemático se convirtiera en una verdadera «cacería de invariantes», una carrera obsesiva en la que sobresalió Paul Gordan. El denominado «problema de Gordan» consistía en calcular todas las posibles fórmulas invariantes que como el discriminante cumplieran una propiedad del tipo:

$$F(Ax^2+By^2+2Cxy) = \det(L)^nF(A_Lx_L^2+B_Ly_L^2+2C_Lx_Ly_L).$$

En el caso del discriminante, la fórmula era $AB-C^2$, pero podrían existir otras fórmulas distintas, F, que fueran también invariantes y que igualmente suministraran información valiosa sobre figuras geométricas y otros entes matemáticos.

Estas técnicas fueron esenciales en geometría y álgebra. No obstante, otra ciencia con gran predicamento, la física, se convertiría pronto en otra ávida consumidora de invariantes, lo cual debe

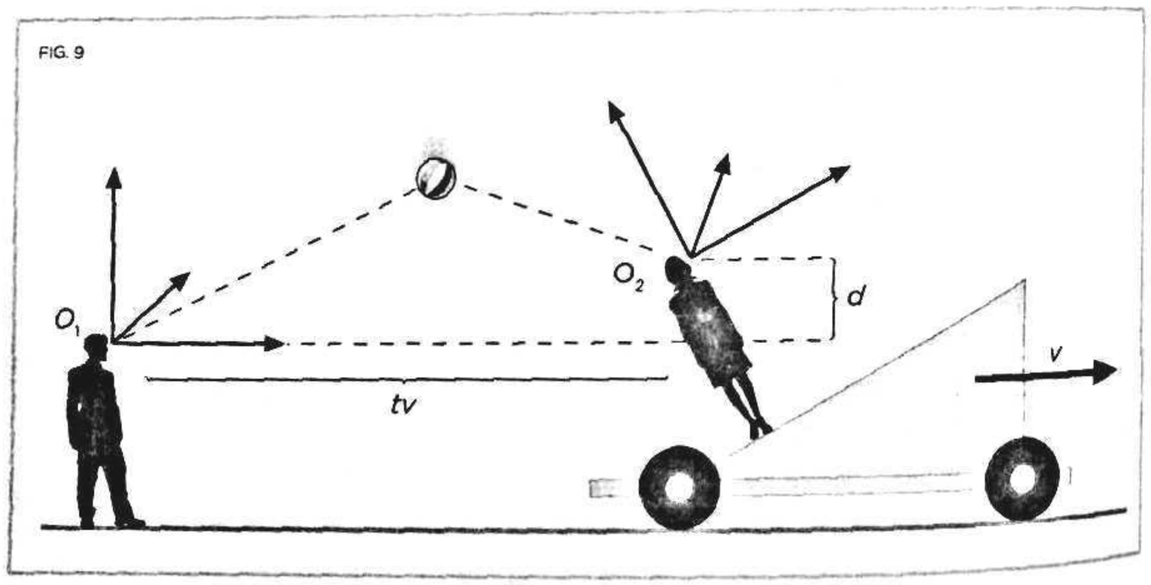
señalarse como una de las razones que condujeron finalmente a Emmy Noether a Gotinga.

EL TEOREMA DE NOETHER

En física se denomina «observador inercial» o «sistema de referencia inercial» a un observador que está inmóvil o se desplaza en línea recta a velocidad constante, ya que desde Galileo se sabe que las leyes de la física discurren entonces con normalidad. Cuando se acelera o se describe una trayectoria curva el movimiento de los cuerpos queda alterado y será necesario introducir correcciones en las leyes físicas habituales para compensar.

Dos observadores inerciales pueden tener perspectivas diferentes. Uno puede estar sobre el suelo en posición horizontal y el otro en una rampa inclinada que se aleja. Esto no plantea problema alguno, siempre y cuando el movimiento se produzca a velocidad constante, v. Si hay dos observadores O_1 y O_2 en esta situación y ambos contemplan un mismo evento —por ejemplo, la caída de una pelota, como se muestra en la figura 9— que se produce en un instante t, las coordenadas x, y, z que aprecian O_1 y O_2 cada uno desde su posición serán diferentes. Así se tienen las respectivas observaciones:

FIG. 9



$$O_1 = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\text{posición}}, \underbrace{t}_{\text{tiempo}}) \text{ y } O_2 = (\underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\text{posición}}, \underbrace{t}_{\text{tiempo}}).$$

Se ha utilizado aquí $\mathbb{R}^4$ en su interpretación física como espacio/tiempo reservando la última coordenada para el tiempo, que en la física newtoniana es absoluto; de modo que tanto O_1 como O_2 medirán exactamente el mismo valor de t.

Ahora bien, aunque O_1 y O_2 realizan observaciones diferentes, pasar de una a otra es simple. Únicamente se tiene que aplicar una rotación, R, para hacer coincidir el sistema de referencia de O_2 que está girado con respecto al de O_1 y, después, tener en cuenta que O_2 está desplazado con respecto a O_1 en un desplazamiento inicial d —que en el gráfico se debe a la diferencia de altura entre ambos— más el tramo que avanza O_2 que, moviéndose a velocidad constante v durante un tiempo t, será $t \cdot v$. Dicho de otro modo:

$$(x_1, y_1, z_1) = d + tv + R(x_2, y_2, z_2)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1, y_1, z_1, t) = (\underbrace{d + tv + R(x_2, y_2, z_2)}_{\substack{\text{traslación + rotación =} \\ \text{movimiento rígido}}}, t)$$

En definitiva, la trasformación que conecta las observaciones de O_1 y O_2 es un movimiento rígido para las tres coordenadas del espacio, mientras que el tiempo newtoniano es absoluto y nunca varía de un observador a otro. Este tipo de transformaciones de $\mathbb{R}^4$ forman un grupo que se denomina «grupo de transformaciones de Galileo». La idea clave aquí es que, al ser observadores inerciales, todas las leyes físicas deben cumplirse del mismo modo, tanto para O_1 como para O_2, y por tanto las fórmulas que rigen dichas leyes deben conducir a los mismos resultados, independientemente de que se utilicen las observaciones de uno o de otro. Dicho de otro modo:

— Las fórmulas de la física newtoniana son invariantes por el grupo de transformaciones de Galileo.

Así, una fórmula como la segunda ley de Newton, $F=ma$, es invariante por el grupo de Galileo, de un modo similar a cómo el discriminante es invariante por aplicaciones lineales.

Sin embargo, a finales del siglo XIX surgieron indicios de que algo no cuadraba del todo en la física newtoniana. En 1865, las ecuaciones del matemático británico James Clerk Maxwell (1831-1879) mostraron que en los fenómenos electromagnéticos, al contrario de lo que se había venido aceptando por siglos en la física clásica, el tiempo no es absoluto. Las transformaciones de Galileo no permiten entonces describir apropiadamente los fenómenos físicos y es preciso un nuevo grupo que respete las ecuaciones de Maxwell. Este motivo llevó al físico neerlandés Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) a introducir en el año 1900 su grupo de transformaciones, las «transformaciones de Lorentz», bajo las cuales las ecuaciones de Maxwell eran invariantes.

El propósito de formular las ecuaciones de campo de la relatividad general de modo que fueran invariantes por el grupo de Lorentz condujo a Einstein acercarse a los matemáticos de Gotinga; y con toda seguridad, la misma razón movió a Hilbert para reclutar a Emmy Noether entre sus filas. Hilbert no se equivocó: el fichaje fue muy productivo.

La vía que intentaba Hilbert para resolver el problema de las ecuaciones de campo difería notablemente del camino que intentaba Einstein. Hilbert pretendía encontrar la respuesta resolviendo un «problema variacional». En este proceso, el principal obstáculo radicaba en encontrar una formulación correcta para los principios de conservación de la energía. La necesidad de salvar este obstáculo condujo a Emmy Noether a plantear su primer gran resultado: el denominado teorema de Noether.

Puede decirse que el universo y todo cuanto contiene es, de forma natural, perezoso, y que si pudiera no se movería más que en línea recta, o ni se movería; quizá ni siquiera existiría. La gran ley del universo es la del mínimo esfuerzo. Por ello, no constituye ninguna sorpresa que buena parte de la física y de las matemáticas consista en averiguar cómo hacer lo menos posible, en calcular mínimos y, en definitiva, a esto se reduce la técnica variacional que intentó Hilbert.

En los cursos básicos de análisis se estudia que si una magnitud $P(t)$ —por ejemplo, la posición de un objeto— cambia con el tiempo, la velocidad a la que varía se denomina «derivada» y se denota $d/dt\, P(t)$ o también $P'(t)$. Cuando $P(t)$ alcanza su mínimo valor, entonces su velocidad será nula y:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}P(t)}_{\substack{\text{velocidad}\\ \text{de descenso}}} = 0.$$

Esto es, aplicando d/dt e igualando a 0 se obtiene el valor de t para el que se consigue la mínima P. El concepto de derivada fue desarrollado por Newton y Leibniz y constituye una de las herramientas más potentes que las matemáticas brindan al resto de las disciplinas científicas.

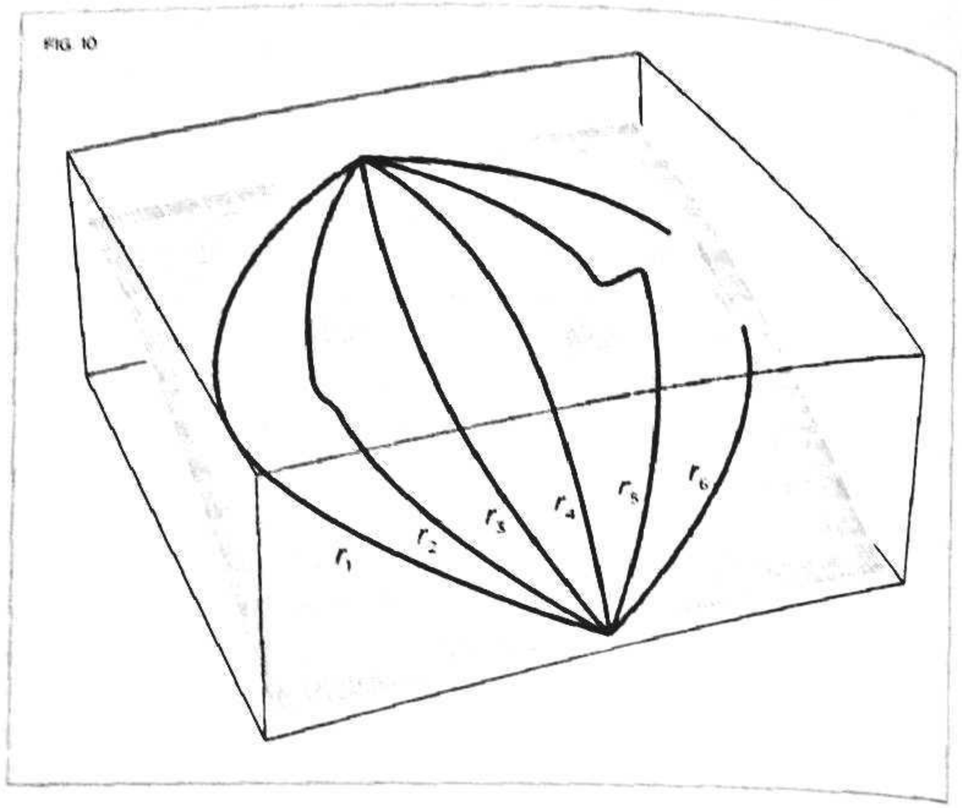
Ahora se abordará un problema más difícil. Un esquiador en lo alto de una pista se deja caer libremente por la ladera, siguiendo la inclinación del terreno. Para averiguar cuál es la ruta que seguirá en este descenso libre, en cada momento t estará situado, utilizando la notación de espacio/tiempo, en una posición (x, y, z, t); pero como no está inmóvil, sino que desciende montaña abajo, x, y, z irán variando a medida que transcurre el tiempo de bajada, por lo que en realidad la posición será algo del tipo $(x(t), y(t), z(t), t)$. El esquiador describe una ruta pero, ¿cuál exactamente? ¿Quizá r_1 o será r_5? Hay muchas rutas, y en cada una de ellas x, y, z variarán de forma diferente, por lo que se tiene:

$$r(t) = (x_r(t), y_r(t), z_r(t), t),$$

lo que significa que para cada ruta $r(t)$ se disponen de fórmulas y valores diferentes para x, y, z. ¿Cuál de todas ellas sigue el esquiador que desciende libremente? En una teoría física, el comportamiento de las cosas está determinado por las ecuaciones de esa teoría. La segunda ley de Newton proporciona la ecuación fundamental de la física newtoniana. Es la ya mencionada:

$$F = m\,a,$$

FIG. 10



que dice que si sobre un cuerpo actúa una fuerza F, cada vez irá más rápido y la aceleración que experimenta, a, es la que se obtiene despejando en la ecuación. Conocida esta, se puede calcular la velocidad y la ruta $r(t)$ que sigue el cuerpo. Por tanto, la ecuación permite determinar cómo se mueven las cosas que se ven alrededor.

La fórmula de Newton enmascara sutilmente la ley fundamental de la naturaleza, la ley del mínimo esfuerzo. Un cuerpo puede almacenar energía de dos maneras: la primera, por su posición o altura —el agua de un embalse, al estar elevada, contiene energía—, lo que se llama «energía potencial»; y la segunda, por su velocidad —al caer el agua gana velocidad, que moverá las turbinas para generar electricidad—, llamada «energía cinética». Por ejemplo, en cada momento del descenso, t, la energía del esquiador será:

$$\underbrace{U(t)}_{\text{energía potencial instante } t} = \underbrace{m}_{\text{masa}} \times \underbrace{g}_{\text{constante de gravedad}} \times z(t), \quad \underbrace{T(t)}_{\text{energía cinética instante } t} = \frac{1}{2} m(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)$$

No hay que detallar estas fórmulas, simplemente interesa confirmar que la energía potencial $U(t)$ depende de la posición $(x(t), y(t), z(t))$ mientras que la cinética, $T(t)$, se calcula a partir de las velocidades en cada eje $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. A medida que desciende un cuerpo, sea un esquiador o el agua de un pantano, pierde energía potencial, altura, que se transforma directamente en energía cinética. La fórmula de Newton dice que en la naturaleza los cuerpos se mueven en la dirección en la que el máximo de energía potencial se transforme en cinética, de forma que se desperdicia siempre el mínimo de energía. Si un cuerpo no sigue esta dirección se deberá a que, de un modo u otro, se está actuando sobre él para desviarlo, lo cual supone la inversión de una energía extra.

En su movimiento real, un cuerpo, siguiendo la ley de Newton, hará que en cada momento t la diferencia $T(t) - U(t)$ sea la mínima posible. Si se sobrepasa esta, se estará actuando para modificar el movimiento a costa de consumir energía innecesaria. Es por ello que $T(t) - U(t)$ es una medida de la acción que se realiza sobre el cuerpo en cada instante t. A lo largo de todo el movimiento del cuerpo, desde el inicio, para $t = 0$, hasta el momento final, t_f, la acción total es:

Límites: Límites inferior ($t=0$) y superior ($t=t_f$) entre los que hacemos la suma.

Integral: Es la suma (el símbolo $\int$ es una S estilizada de «suma») instante a instante de una cantidad que varía continuamente.

$$\int_0^{t_f} (T(t) - U(t))dt$$

Acción Total

Acción o energía extra realizada en el instante t.

Esta integral se denomina «acción» y mide la energía extra que se invierte en desviar el movimiento de un cuerpo de su trayectoria natural. Un cuerpo en su movimiento se ajusta siempre al «principio de mínima acción», según el cual seguirá la ruta que haga que esta integral, la acción, tome el menor valor posible. Es la ley del mínimo esfuerzo, que todo lo rige. La expresión $L = T(t) - U(t)$ se denomina «lagrangiano» y, si se utilizan las fórmulas que se han visto antes para $T(t)$ y $U(t)$, se observa que depende en cada momento de la posición y velocidad del cuerpo:

$$L\Big(\underbrace{x(t),y(t),z(t)}_{r(t)=\text{posición}},\underbrace{x'(t),y'(t),z'(t)}_{r'(t)=\text{velocidad}},t\Big)=\frac{1}{2}m(\underbrace{x'(t)^2,y'(t)^2,z'(t)^2}_{T(t)})-\underbrace{mgz(t)}_{U(t)}.$$

La integral de más arriba, esto es, la acción, se puede escribir ahora como:

$$A(r)=\int_0^{t_f} L(r(t),r'(t),t)\,dt.$$

De todas las rutas posibles, la que realmente seguirá el cuerpo será la que proporcione la mínima acción, es decir, el mínimo valor de $A(r)$. Este es el conocido como «principio de mínima acción». En el caso del esquiador, puesto que el descenso correcto es el de mínima acción, debe calcularse el valor de la acción para todas las posibles rutas y hay que quedarse con la que proporciona menor valor para A. De esta manera, si en la figura 10 se tiene:

$$A(r_1)=-10,\ A(r_2)=-12,\ A(r_3)=-8,\ A(r_4)=-7,\ A(r_5)=-6,\ A(r_6)=-5,$$

el mínimo valor se alcanza para $A(r_2)=-12$ y la ruta, siguiendo el principio de mínima acción, sería la que se ha marcado como r_2.

Aquí se han trazado solo seis de las infinitas posibles rutas que podría seguir el esquiador. Es obvio que en la práctica no puede calcularse el valor de A para todas ellas, una a una, pero sí un mínimo, derivando. La ruta correcta, $r(t)$, se obtendrá derivando $A(r)$ e igualando a 0; aparecerá despejando la ecuación: Esta no es una ecuación normal, sino lo que se llama una «ecuación variacional». El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló las técnicas que permiten transformar esta ecuación en otra más sencilla en la que no aparecen ya integrales y que se conoce como «ecuación de Euler-Lagrange», que se denota *EL*,

$$EL(r(t),\ r'(t),\ t)=0,$$

de la que finalmente se puede calcular $r(t)$ utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales. El principio de mínima acción, también conocido como «principio de Hamilton», supuso un método revolucionario para estudiar el movimiento de los cuerpos en la física

newtoniana. Sin embargo, lo esencial aquí es que también es aplicable a la física relativista. Hilbert fue capaz de calcular el lagrangiano válido para la relatividad general y quiso utilizar el principio de mínima acción para deducir las ecuaciones de la relatividad general, las ecuaciones de campo. Einstein se le adelantó por unos días, quizá meses, pero el «lagrangiano de Hilbert», también llamado «lagrangiano de Hilbert/Einstein», fue un logro teórico de primera magnitud y se considera una de las piezas clave de la física.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Parte de los problemas con los que se encontró Hilbert se centraban en la necesidad de encontrar una formulación correcta para los principios de conservación de la energía dentro de la física relativista. Emmy Noether se dio cuenta de que la solución estaba conectada con los grupos de transformaciones y los invariantes. El lagrangiano, en el caso más sencillo que se ha explicado antes, es de la forma $L(r(t),\ r'(t),\ t)$. La última variable es el tiempo y se puede considerar para esa variable un grupo de traslaciones $T_s(t)=t+s$. Si el lagrangiano es invariante por este grupo de traslaciones, se tiene que:

$$\underbrace{\underbrace{L(r(t),r'(t),t)}_{\substack{\text{sin aplicar la transformación}\\ \text{a la variable } t}}=\underbrace{L(r(t),r'(t),T_s(t))}_{\substack{\text{aplicando la transformación}\\ \text{a la variable } t}}}_{\text{el lagrangiano no varía}}$$

Para distintos valores de s, el lagrangiano no varía y proporciona un mismo valor siempre. Una cosa constante, que no varía, que no se mueve, tiene velocidad cero, derivada 0. Por tanto:

$$d/dt\ L(r(t),\ r'(t),\ T_s(t))=0.$$

Al utilizar esta identidad junto con las ecuaciones de Euler-Lagrange se puede demostrar que existe cierta expresión H —a veces es lo que se denomina «hamiltoniano»— tal que:

$$d/dt\, H\,(r(t), r'(t), T_s(t)) = 0 \Rightarrow H\,(r(t), r'(t), T_s(t)) = \text{constante.}$$

Dicho de otro modo, hay una magnitud que se mantiene constante a lo largo del movimiento del cuerpo, que en este caso es la energía. En definitiva, si el lagrangiano es invariante por un grupo de transformaciones, la derivada del lagrangiano correspondiente a ese grupo se anulará y esto, combinado con las ecuaciones de Euler-Lagrange, permite encontrar una expresión que se mantiene constante mientras el cuerpo se mueve que corresponderá a una ley de conservación. El teorema de Noether, en pocas palabras, se puede resumir como:

— A cada grupo de invariancia del lagrangiano le corresponde una ley de conservación.

En función del grupo de transformaciones, la magnitud conservada será diferente. Por ejemplo, sin entrar en detalles:

— Si el grupo de transformaciones es un grupo de traslaciones para el tiempo, se obtiene una ley de conservación de la energía.
— Para un grupo de rotaciones, se obtiene una ley de conservación del momento angular.
— Para un grupo de traslaciones de las variables de posición, se obtiene una ley de conservación del momento lineal.

El valor fundamental del resultado de Noether es que ofrece un tratamiento unificado para todas las leyes de conservación, tanto en la física newtoniana como en la relativista. Es uno de los resultados más sorprendentes de las matemáticas del siglo XX y un claro ejemplo de la imbricada relación entre física y matemática que Hilbert, Einstein y Noether desvelaron de forma brillante.

CAPÍTULO 3

Los anillos «noetherianos» y el método que revolucionó el álgebra

Emmy Noether vivió sus años más felices acompañada de un grupo de alumnos de Gotinga, los llamados «chicos Noether», con los que se adentró en laberintos matemáticos muy complejos. En la década de 1920 publicó la teoría general de ideales en anillos y un estudio de las álgebras y anillos no conmutativos; además, dio a conocer su método axiomático, que transformó el álgebra y fue aplicado a las restantes disciplinas. Por todo ello, la comunidad matemática caería rendida a sus pies en 1932.

Los inicios de la carrera docente de Emmy Noether se vieron impregnados por las desastrosas consecuencias que tuvo para Alemania el término de la Primera Guerra Mundial. La situación determinó que sus primeras lecciones formaran parte de un semestre intermedio extraordinario, especialmente programado para veteranos de guerra. Por fortuna, pudo impartir cursos de diferente naturaleza a lo largo de los siguientes años y muchos de ellos estuvieron directamente conectados con las áreas de investigación de su interés.

El tratamiento que las autoridades alemanas dispensaron a Emmy Noether a lo largo de su carrera académica fue irritante, a pesar de que la élite científica internacional hizo numerosas intervenciones en su favor. Así, en septiembre de 1919 fue reconocida como profesora por la Universidad de Gotinga, pero solo en calidad de *privatdotzent*: con ello, podía dictar cursos e impartir clases, pero quedaba desvinculada del cuerpo docente oficial de la universidad. Tres años después, el ministerio prusiano de Ciencia, Arte y Educación Pública le concedió el grado de *ausserordentlicher professor* —profesora asociada—, lo que habría sido una buena noticia de no ser por el texto que acompañaba el nombramiento: «Bien entendido que este título no significa ningún cambio en su posición legal presente». De forma abusiva, su posición fue la de una profesora contratada permanente, sin carácter oficial alguno y con nulos efectos económicos y académicos.

Por fortuna, las presiones y la complicidad del Departamento de Matemáticas permitieron que un año más tarde, en 1923, recibiera un contrato para enseñar álgebra, lo que incluía clases de teoría y de ejercicios. Finalmente, después de trabajar cerca de quince años en la universidad, primero en Erlangen y luego en Gotinga, Emmy Noether pudo obtener ingresos de forma estable, si bien modestos. La progresión normal para un profesor culminaba habitualmente en la posición de *ordinarius*, pero en su caso quedó estancada en una plaza de primerizo sin asignación docente, parcheada con un contrato tramitado bajo mesa.

Para mayor desventura, hay que añadir que este panorama se prolongó hasta el final de su carrera académica en Alemania. El único cambio que tuvo lugar acaeció en 1933, con la irrupción de los nazis y la suspensión de cualquier vinculación con la universidad; no solo la suya, sino también la de numerosos profesores, que quedaron estigmatizados.

«Cuando fui llamado de forma permanente a Gotinga en 1930, con toda firmeza intenté obtener una posición mejor para Emmy Noether, ya que me avergonzaba ocupar un puesto privilegiado por encima de quien sabía que me superaba como matemático en muchos aspectos.»

— Hermann Weyl

Emmy Noether nunca fue dramática a la hora de juzgar su situación. En cambio, la impresión general quedó bien dibujada en el testimonio del matemático alemán Hermann Weyl (1855-1955), una de las grandes personalidades científicas del siglo XX, que criticó la injusticia que representaba mantener a alguien de su talla en puestos tan inferiores. En cualquier caso, ni siquiera Weyl consiguió que Emmy Noether obtuviera su merecido ascenso, pese a tratarse de una profesora de acreditado talento y grandes logros matemáticos. Emmy Noether ya era cuadragenaria, pero se la seguía tratando como a aquella joven alumna que osó irrumpir en el mundo universitario alemán.

Sin embargo, estas contrariedades no parecieron afectarla especialmente. De hecho, valoró favorablemente la posición alcanzada, que le permitía cierta flexibilidad a la hora de seleccionar los cursos que estaban más próximos a sus intereses, casi siempre centrados en los tópicos de investigación. También evitó consagrar parte de su tiempo a las materias más básicas, como le hubiera correspondido de no haber sido discriminada.

Esta libertad de movimientos resultó preciosa para Emmy Noether, cuya trayectoria profesional evidenció que prefería ser investigadora a profesora. La parte docente, en muchos momentos, le supuso un pequeño tributo para poder desarrollar su auténtica pasión: la creación de matemáticas.

LOS «CHICOS NOETHER»

El contrato del año 1923 propició un cambio esencial, ya que la obligaba a mantener el contacto con sus estudiantes a lo largo de todo el proceso formativo: desde las clases en el aula hasta la evaluación final en los exámenes. Fue el empujón que necesitaba para comenzar a promover tesis doctorales y elaborar sus propias ideas. El primer alumno que se doctoró bajo la tutela de Emmy Noether, si bien se trató de una tesis codirigida, fue otra mujer: la filósofa y matemática alemana Grete Hermann (1901-1984), que lo consiguió en 1925. Después de ella, llegarían otras muchas.

Así arrancó la etapa más brillante de la carrera investigadora de Emmy Noether. De inmediato, supo rodearse de un grupo incondicional de estudiantes que, más que un equipo de investigación, se asemejaba a una ruidosa familia enfrascada en continuos paseos y reuniones de fin de semana. La densa atmósfera de sus conversaciones estuvo compuesta de axiomas, anillos, ideales y álgebras. No es de extrañar que en Gotinga llegaran a ser conocidos como los «chicos Noether».

Este grupo no solo compartía la pasión por las matemáticas, sino que también se regía por un estilo de vida en cuyo centro hervía una nueva matemática. Además de Grete Hermann, entre

SIN TIEMPO PARA LAZOS AFECTIVOS

Un rasgo principal de la vida de Emmy Noether, que bien podría resumir su trayectoria entera, fue su pasión por las matemáticas. De hecho, el amor que sintió por esta ciencia fue desmedido y absorbió su tiempo por completo. Según todos los que la conocieron, su rostro rebosaba una máxima felicidad cuando investigaba la matemática y disertaba sobre *ella* con sus alumnos y otros profesores, a todas horas. No es de extrañar que nunca se le conociera relación sentimental alguna y permaneciera soltera y sin descendencia hasta el final de sus días: su corazón había sido entregado hace muchos años a una ciencia que la fascinaba. En palabras de Hermann Weyl, que tanto la apreciaba y fue uno de sus principales valedores, «los aspectos esenciales de la vida humana permanecían sin desarrollar en ella, entre ellos, supongo, el erótico, el cual, si tenemos que creer a los poetas, es para muchos de nosotros la más fuerte fuente de emociones, arrebatos, deseos, preocupaciones y conflictos». Weyl, matemático como ella, no dudó en definirla como «un ser unilateral desequilibrado por el sobrepeso de su talento matemático». En cualquier caso, nadie puede negar que Emmy Noether fue una persona muy afectuosa, tanto con su familia como con sus numerosas amistades, y que prodigó su bondad y talento con alumnos y profesores; eso sí, siempre sintió predilección por aquellos con los que podía «charlar matemáticas».

Emmy Noether, alrededor de los 47 años de edad.

los «chicos Noether» podría citarse, sin entrar en más detalles, a Krull, Hölzer, Grell, Witt, Tsen, Shoda, Levitzki, Schmeidler y Waerden. Sus orígenes resultaban de lo más variado, pues provenían de Estados Unidos, Rusia, Japón, China, Francia, Países Bajos, Israel, etcétera. Muchos llegaron como simples alumnos, pero en otros casos se trataba de profesores ya consolidados.

Con estos mimbres, Emmy Noether formó un grupo que se convirtió en el epicentro de la actividad investigadora de Gotinga, tanto

por el número y calidad de sus publicaciones como por su influencia sobre otros investigadores. En esta explosión de creatividad científica participaron matemáticos de la talla del austríaco Emil Artin (1898-1962), el alemán Helmut Hasse (1898-1979) y el ruso Pavel Alexandroff (1896-1982), que colaboraron en numerosas ocasiones.

«¡EL ENEMIGO HA SIDO DERROTADO, HA ABANDONADO!»

Sin duda, el método de trabajo que desarrolló Emmy Noether fue muy particular y, desde luego, no apto para todos los públicos. Los oyentes que asistían ocasionalmente a alguna de sus clases quedaban atónitos: sin apenas comprender nada, recibían una exposición entusiasta y pasional de ideas semielaboradas y cálculos que bien podían culminar, pero también rehacerse o abandonarse en el camino. ¿Cómo podía ser aquello? En las aulas donde impartía clase, los resultados no se demostraban como algo completo y cerrado, sino que se proponían como un proyecto: un desafío con el que aquella profesora retaba a cualquiera de los presentes... y a sí misma. De este modo, los resultados debían cobrar forma a través de la discusión con los alumnos, como si se tratara de una obra colectiva de creación matemática.

Para que este sistema encajara de forma eficiente se impartía el mismo curso, semestre tras semestre, sobre alguna teoría en desarrollo. Así, de una edición a la siguiente se ganaba en orden y se incorporaban las propuestas, técnicas y soluciones halladas, hasta culminar en un grupo tangible de resultados finales. Esta vía de sacrificio, esfuerzo y talento solo podía ser asumida por una audiencia totalmente inmersa en las matemáticas e identificada por completo con el método de Emmy Noether. Quienes demostraban su capacidad matemática y un compromiso firme con este sistema didáctico, se convertían en «chicos Noether».

Su estilo docente no tardó en cosechar críticas por parte de los alumnos ajenos al grupo. A veces, algún joven despistado aparecía por clase con el propósito de seguir las lecciones. Dado que

el núcleo duro de los «chicos Noether» ocupaba habitualmente las primeras filas, el «intruso» se veía obligado a sentarse en las últimas bancadas. No hacía falta que transcurriese mucho tiempo para que, apabullado por las explicaciones, aquel incauto emprendiera una discreta retirada, algo imposible porque debía atravesar el aula. Ese era el momento que aprovechaba alguno de los «chicos Noether» para exclamar, con rotunda satisfacción, lo que se convirtió en un lema: «¡El enemigo ha sido derrotado, ha abandonado!».

«Mis métodos son realmente métodos para trabajar y pensar; es por eso que anónimamente han penetrado en todas partes.»

— EMMY NOETHER

A pesar de estos signos de prepotencia, Emmy Noether se implicaba a fondo en la formación y bienestar de «sus chicos» y los recompensaba con creces por seguir su método. Precisamente, uno de los rasgos más notables de su personalidad, señalado por todos sus colaboradores, fue hacer gala de una generosidad extrema, que brotaba desde lo más profundo de su ser. El objetivo primordial de sus investigaciones siempre fue culminar una teoría, una idea o un resultado, y no que su nombre apareciera reflejado en el trabajo final. A pesar de que en las disciplinas científicas se suele medir el currículo de un investigador por el número de artículos en los que figura como autor o director de tesis, Emmy Noether consideró esta cuestión futil y secundaria. No importaba que todas las ideas subyacentes se debieran a su inspiración: ella cedía los méritos.

La mente de Emmy Noether solo estuvo gobernada por dos pasiones, las matemáticas y su grupo de alumnos; incluso publicó su primer trabajo magistral junto a uno de ellos. Por tanto, la lectura de sus trabajos de investigación no permite realizar una valoración justa y precisa de las aportaciones que realizó a las matemáticas: su legado requiere indagar también en los trabajos de todos cuantos la rodearon.

Emmy Noether se reveló, en definitiva, como la locomotora de un tren de jóvenes talentos que perseguía con ahínco la creación de matemáticas. Su determinación llevó aún más lejos los

planes de David Hilbert y Felix Klein, los grandes impulsores de que hubiera una mayor interacción entre profesores y alumnos. Ninguno de ellos se equivocó, y la Universidad de Gotinga se afianzó como el centro de investigación más importante del mundo.

HACIA LA EXCELENCIA MATEMÁTICA

A lo largo de la trayectoria matemática de Emmy Noether se pueden distinguir dos períodos importantes. El primero de ellos ya ha sido tratado y abarca desde 1907 hasta 1919: son los años en los que trabajó a las órdenes de unos y otros, primero a la sombra de Paul Gordan y después al amparo de David Hilbert. Aunque su talento se vio constreñido y tuvo que volcarse en la teoría de invariantes, supo culminar esta etapa con el gran teorema de Noether sobre las leyes de conservación física.

El segundo período, más fértil y agitado, comprende desde 1920 hasta los años finales transcurridos en Estados Unidos, donde desarrollaría sus propias líneas de investigación y estudiaría estructuras algebraicas mediante su método axiomático; todo ello, sin olvidar un hecho decisivo en su biografía, la huida de Gotinga en 1933. En la década de 1920, Emmy Noether sentó las bases de dos grandes teorías: la teoría general de ideales en anillos, que presentó entre 1920 y 1926; y el estudio de las álgebras y anillos no conmutativos, que absorbieron su atención desde 1927 en adelante.

Fue en este segundo período cuando se consagró internacionalmente como una de las figuras esenciales de las matemáticas, gracias a los resultados que obtuvo en sus investigaciones y a las teorías que formuló. Sin embargo, el salto a la categoría de genio matemático se produjo de forma tardía, alrededor de los cuarenta años de edad. El punto de inflexión que marcó ese gran salto fue, sin duda, la publicación de los trabajos en los que desarrolló la teoría de ideales. Sus conclusiones comportaron la drástica renovación de toda una rama de las matemáticas: el álgebra. Fue Emmy Noether quien la transformó en la disciplina que se conoce en la actualidad, tal y como se imparte en las universidades.

El primero de estos hitos científicos llegó en 1920, con la publicación en la revista *Mathematische Zeitschrift* de su trabajo *Módulos en dominios no conmutativos, especialmente aquellos compuestos de expresiones diferenciales y en diferencias*. La obra, que realizó de forma conjunta con uno de sus «chicos», Werner Schmeidler (1890-1969), introdujo los conceptos de ideales por la izquierda y por la derecha, hoy básicos en la teoría de ideales en anillos, y también dio a conocer su método axiomático como nuevo modo de hacer álgebra.

Estas ideas cristalizaron de forma definitiva en 1921 con *Teoría de ideales en los dominios de integridad*, un artículo revolucionario en el que Emmy Noether plasmó con precisión la condición de cadena ascendente que dará lugar al concepto de «anillo noetheriano». El trabajo, publicado por la revista *Mathematische Annalen*, adquirió una gran trascendencia. A partir de ese momento, el sobrenombre «noetheriano» comenzó a aplicarse a diferentes objetos matemáticos para indicar que satisfacen algún tipo de condición de cadena en la línea que ella introdujo. El apellido Noether, así, aparece en esa lista que todo estudiante de matemáticas, de cualquier país del mundo, ha visto escribir a golpe de tiza en la pizarra; y todo ello, sin que ella lo pretendiera en absoluto.

Por otra parte, ese año de 1921 se vio empañado por el fallecimiento de su padre, Max, que vivía impedido desde hacía tiempo. Emmy lloró amargamente su pérdida: no en vano, aquel hombre, que había cambiado el apellido «Nöther» por «Noether» y tanto disfrutaba viéndola danzar de niña, la había rodeado de cariño, había favorecido su pasión por las matemáticas y le había allanado el camino hacia la Universidad de Erlangen.

LA GRANDEZA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO

Llegados a este punto, es preciso destacar que el legado de Emmy Noether trasciende a la publicación de una teoría concreta, por brillante que esta sea. Su mayor contribución fue aplicar, con maestría inédita, un modo de pensar en matemáticas: el método axiomático, que ha marcado el estilo de hacer y escribir matemáticas durante el último siglo. Si bien se puede citar entre los pioneros del método axiomático a otros grandes matemáticos alemanes, como David Hilbert y Richard Dedekind (1831-1916), no hay duda de que las bases para una construcción del álgebra —y parcialmente la geometría— de forma completamente axiomática son obra, fundamentalmente, de Emmy Noether.

No importa qué problema se esté estudiando: lo primordial será siempre el análisis de los elementos esenciales que entran en juego, se trate de un grupo de funciones que representan el movimiento de un cuerpo, las transformaciones del plano o el espacio, los números racionales o reales, etcétera. En todos los casos se contará con operaciones de suma, resta, producto y división que permitirán combinar unos elementos para obtener otros. La lista de propiedades que presentan la suma y el producto es común a todos los casos y constituye el conjunto de las leyes básicas que permiten abordar el problema de una forma general: son los axiomas. De este modo, el objeto central de la investigación será la suma y sus axiomas básicos, que constituyen, en conjunto, lo que se denomina una estructura algebraica abstracta, común a varios casos particulares.

Desde la perspectiva de Emmy Noether, el interés radicaba directamente en las estructuras algebraicas, sin necesidad de detenerse como paso previo en ningún caso particular. Por ello, su objeto de estudio fueron los anillos, los módulos, los ideales, los cuerpos, los grupos; todos ellos, ejemplos de estructuras algebraicas. El método axiomático casaba de forma natural con las cualidades matemáticas de Emmy Noether. Su mente, capaz de descubrir las conexiones intrínsecas que subyacen en problemas que en apariencia son diferentes, la facultó para alcanzar los más grandes destinos: por ejemplo, contemplar las matemáticas con una visión unificadora de la que no había precedentes.

LAS MIL Y UNA FORMAS DE SUMAR Y MULTIPLICAR

Sumar y multiplicar son cosas que uno aprende casi al tiempo que a leer y escribir. Ciertamente, suma y producto no son operaciones

demasiado difíciles. Se conocen sus reglas y se dispone de algoritmos que, paso a paso, permiten efectuar cualquier cálculo. Por ejemplo, se pueden tomar dos números sencillos, dos números naturales de $\mathbb{N}$, como 1234 y 21. Sumarlos no supone ningún problema:

$$\underbrace{1234 \quad y \quad 21}_{\text{se tiene un par de números de } \{\mathbb{N}\}} \rightarrow \begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ \quad 2\,1 \\ \hline \underbrace{1\,2\,5\,5}_{\text{se aplica el algoritmo de la suma}} \end{array} \rightarrow \underbrace{1\,2\,5\,5}_{\text{el resultado es un número de } \{\mathbb{N}\}}.$$

Como se explicó, un par de números de $\mathbb{N}$ también se puede escribir como (1234, 21), que es un elemento de $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}=[\mathbb{N}]$. La suma, +, transforma entonces cualquier par de elementos de $[\mathbb{N}]$ en un solo número que, otra vez, volverá a ser de $\mathbb{N}$. En definitiva, + es una aplicación.

$$\begin{aligned} +:\ \{\mathbb{N}\}^2 &\rightarrow \{\mathbb{N}\} \\ (1234,21) &\rightarrow 1234+21=1255 \\ (a,b) &\rightarrow a+b. \end{aligned}$$

Exactamente del mismo modo, si se multiplica un par de números de $\mathbb{N}$, de nuevo se obtiene otro número de $\mathbb{N}$. Por ejemplo, si se multiplica el par (1234, 21) da $1234\cdot 21=25914\in\mathbb{N}$ y, en consecuencia, también el producto es una aplicación, $\times:\mathbb{N}^2\rightarrow\mathbb{N}$, que transforma un par de $[\mathbb{N}]^2$ en un número de $\mathbb{N}$. Técnicamente, se dice que la suma y el producto son operaciones «cerradas» o «internas» para los números naturales.

En realidad, la cantinela escolar de «más por menos, menos; menos por menos, más» sirve para dar el salto y ser capaces de sumar y multiplicar también números de $\mathbb{Z}$, números enteros con signo, positivos o negativos. Es evidente que la suma y el producto de dos números de $\mathbb{Z}$ dan como resultado, otra vez, un número de $\mathbb{Z}$ y, en consecuencia, se tienen aplicaciones del tipo $+:[\mathbb{Z}]^2\rightarrow\mathbb{Z}$ y $\times:[\mathbb{Z}]^2\rightarrow\mathbb{Z}$. El resultado, es decir, el final de la flecha, siempre se queda en $\mathbb{Z}$, por lo que son operaciones cerradas para $\mathbb{Z}$.

Si se invierte un mínimo esfuerzo, se es capaz de sumar números de $\mathbb{Q}$, números racionales. Como la suma y producto de fracciones proporciona siempre otra fracción, vuelven a obtenerse operaciones cerradas para $\mathbb{Q}$ del tipo $+:[\mathbb{Q}]^2\rightarrow\mathbb{Q}$ y $\times:[\mathbb{Q}]^2\rightarrow\mathbb{Q}$. Esto se extiende también a los números reales de $\mathbb{R}$, para los cuales $+:[\mathbb{R}]^2\rightarrow\mathbb{R}$ y $\times:[\mathbb{R}]^2\rightarrow\mathbb{R}$ son operaciones cerradas.

Sumar y multiplicar parecen tareas sencillas y justo al principio de este apartado se ha insinuado que se aprenden a la par que otras cosas elementales, como leer, cuestiones en las que uno se embarca recién cumplidos los 5 años. Sin embargo, esto no es del todo cierto: con 5 años no se aprende a sumar, se comienza a aprender a sumar. A medida que se avanza se amplía el alcance de lo que se entiende por suma y se va aplicando a objetos cada vez más y más complejos. El proceso es tan lento y progresivo que casi no se percibe, pero al terminar la enseñanza secundaria un alumno habrá aprendido a sumar muchos tipos de objetos diferentes, no solo números. Por ejemplo, las formas y fórmulas, de las que se habló en el capítulo anterior, también se suman y multiplican.

Para construir una fórmula basta con disponer de números y de una variable. Los números se pueden escoger de cualquiera de los conjuntos que ya son familiares: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. La variable, también a capricho, puede ser x, y o la letra que se desee. Así, combinando números de $\mathbb{N}$ con la variable x, se pueden escribir fórmulas como:

$$5x^2+10x+1,\ 3x+2 \text{ o } 9x^5+4x^4+3x^2+x+6.$$

Si se desea seguir escribiendo, hay margen de sobra, puesto que hay infinitas. Todas reunidas forman un conjunto que se denota $\mathbb{N}[x]$. Del mismo modo, tomando $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{N}$, se puede también considerar $\mathbb{Q}[x]$, que agrupa todas las fórmulas que combinan números racionales, fracciones de $\mathbb{Q}$, con la variable x. Como son, por ejemplo:

$$\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{6}{7},\ \frac{x}{9}+\frac{1}{12} \text{ o } \frac{5}{3}x^4+4x^3-2x+\frac{13}{2}.$$

Estas constituyen solo tres ejemplos de las infinitas fórmulas de este tipo que se encuentran en $\mathbb{Q}[x]$. Si en lugar de $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$ se em-

plean números enteros o reales, se obtiene $\mathbb{Z}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$. Este tipo de fórmulas se denominan polinomios y son uno de los objetos de estudio fundamentales del álgebra. Si se sabe sumar o multiplicar números, también se puede sumar o multiplicar polinomios y fórmulas. En efecto, si se toman los polinomios $3x^2-2x+9$ y $5x^2+4x+2$, ambos de $\mathbb{Z}[x]$ —puesto que combinan, los dos, números enteros positivos y negativos de $\mathbb{Z}$ con la variable x—, se puede calcular su suma y producto de forma similar a como se hace con números:

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 & -2x & +9 \\ + & 5x^2 & +4x & -2 \\ \hline & 8x^2 & +2x & +7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & 3x^2 & -2x & +9 \\ \times & & 5x^2 & +4x & -2 \\ \hline & & -6x^2 & +4x & -18 \\ & 12x^3 & -8x^2 & +36x & \\ 15x^4 & -10x^3 & +45x^2 & & \\ \hline 15x^4 & +2x^3 & +31x^2 & +40x & -18 \end{array}$$

El algoritmo es prácticamente idéntico al que se utiliza para números, solo que en el caso de los polinomios, la posición de cada coeficiente viene indicada por la potencia de x que le acompaña. No es una sorpresa comprobar que al sumar y multiplicar estos dos polinomios de $\mathbb{Z}[x]$ se vuelve a obtener un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$, por lo que + y × son operaciones cerradas para $\mathbb{Z}[x]$. De este modo, son aplicaciones del tipo $+:\mathbb{Z}[x]^2 \to \mathbb{Z}[x]$ y $\times:\mathbb{Z}[x]^2 \to \mathbb{Z}[x]$, exactamente lo mismo que sucedía para números. Todo esto se repite al pie de la letra para $\mathbb{N}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$.

Básicamente, sobran los conocimientos de un estudiante de diez años para presentar operaciones como, por ejemplo:

$$+:\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ +:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ +:\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ +:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

y unos años más adelante, se dispone también de:

$$+:\mathbb{N}[x]^2 \to \mathbb{N}[x],\ +:\mathbb{Z}[x]^2 \to \mathbb{Z}[x],\ +:\mathbb{Q}[x]^2 \to \mathbb{Q}[x],\ +:\mathbb{R}[x]^2 \to \mathbb{R}[x].$$

Todas ellas se denotan mediante +, a todas ellas se les llama suma, pero cada una involucra técnicas y cálculos diferentes. A pesar de definirse de distinta manera, todas poseen las mismas propiedades esenciales. Otro tanto se tendrá para el producto.

LA IMPORTANCIA DE LAS OPERACIONES

Como es sabido, la suma y el producto son operaciones, pero lo primero es discernir qué es una operación. Los ejemplos anteriores señalan el camino, ya que cada conjunto, dependiendo de cómo son sus elementos, enteros, fracciones o polinomios, requiere una técnica diferente para sumar y multiplicar. Así, en todos los casos, se tienen los siguientes elementos:

- Un conjunto que puede ser $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]$ o el que sea, que puede llamarse en general A.
- Un método o algoritmo que indica cómo combinar un par de elementos de A para obtener otro elemento también de A. Este algoritmo se representa mediante un símbolo y, por no utilizar + o ×, que ya están reservados para suma y producto, puede emplearse otro diferente: por ejemplo, $\oplus$. Como el algoritmo transforma un par de elementos de A^2 en un elemento de A, será una aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \oplus\ A^2 & \to & A^2 \\ (a, b) & \to & a \oplus b \end{array}$$

En definitiva, para dar una operación se debe indicar quién es el conjunto A y cómo funciona la aplicación o algoritmo $\oplus$.

De este modo, $+:[\mathbb{N}]^2 \to \mathbb{N}$ es una operación en $\mathbb{N}$ y $+:[\mathbb{Z}]^2 \to \mathbb{Z}$ es una operación en $\mathbb{Z}$. Ambas son diferentes, ya que están definidas para conjuntos diferentes. Igualmente, $+:\mathbb{N}[x]^2 \to \mathbb{N}[x]$ o $\times:\mathbb{N}[x]^2 \to \mathbb{N}[x]$ y todas las que se han visto antes son operaciones: cada una en el conjunto en que está definida.

La clave está en que el concepto de operación es muy amplio y sobrepasa a la suma y producto usuales. Para verlo, se puede tomar un conjunto cualquiera, no necesariamente de números. Por

ejemplo, el conjunto A={▲,■,⬟}, que ya apareció en el primer capítulo. En este conjunto A se considerarán dos operaciones $\oplus: A^2 \to A$ y $\otimes: A^2 \to A$. Para explicar cómo funcionan ⊕ y ⊗, se recurrirá a las tablas que se adjuntan en la figura 1.

Utilizar las tablas es fácil, tal y como indican los diagramas de flechas con los que se escoge la fila y columna adecuada para obtener el resultado. Así se tiene que:

$$⬟ \oplus ■ = ▲ \text{ o que } ▲ \otimes ⬟ = ▲.$$

De forma sencilla, las tablas proporcionan también el resultado de cualquier otra operación que se ocurra. Se puede incluso resolver la ecuación:

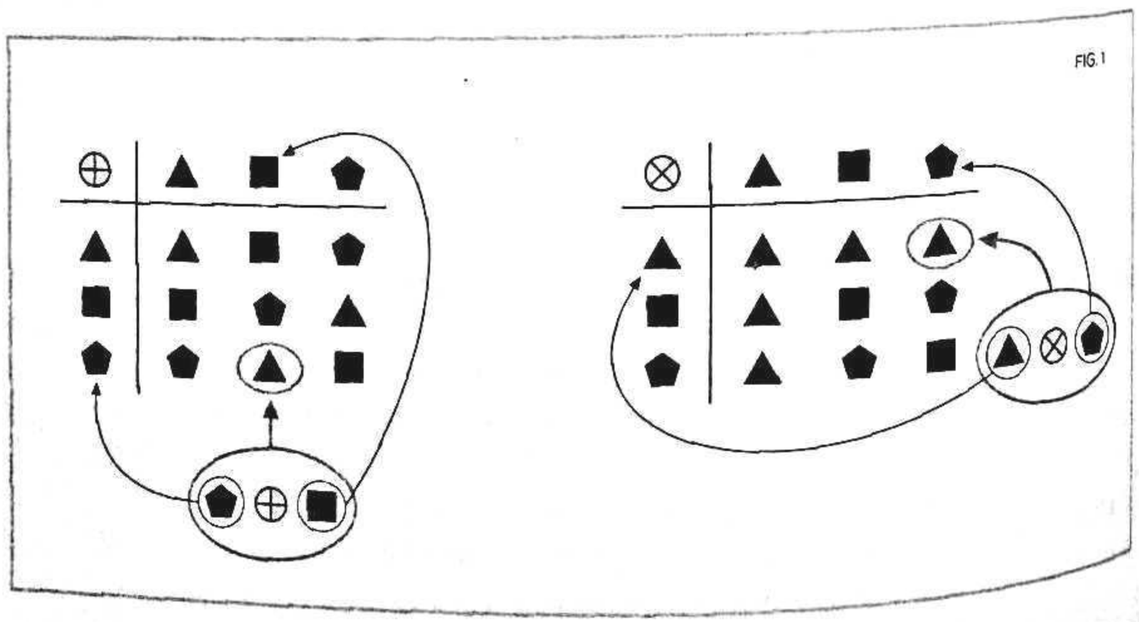
$$⬟ \oplus x = ■ \qquad (1)$$

si se busca el valor adecuado de x en la última fila de la operación ⊕ para deducir que solo hay única posibilidad: la única solución es:

$$x = ⬟.$$

Tanto ⊕ como ⊗ son operaciones en A={▲,■,⬟}, del mismo modo que + y × son operaciones en ℕ. La única diferencia es que

FIG. 1



⊕ y ⊗ se han definido de forma un tanto artificiosa, dando una tabla; mientras que + y × tienen una interpretación natural, un significado. Son la suma y producto que permiten resolver problemas de la aritmética.

Inventarse una operación es tan simple como lo que se acaba de hacer: basta tomar un conjunto, elegir un símbolo para dar nombre a la operación y rellenar una tabla como las que se han mostrado. Estos ejemplos indican al menos que, por muy acostumbrados que se esté a la suma y el producto, no son las únicas operaciones posibles: existe una amplia gama aparte de ellas, ocultas en casi cualquier rincón de las matemáticas. De hecho, las transformaciones, rotaciones y traslaciones del capítulo anterior proporcionan ejemplos de operaciones de vital importancia para las matemáticas.

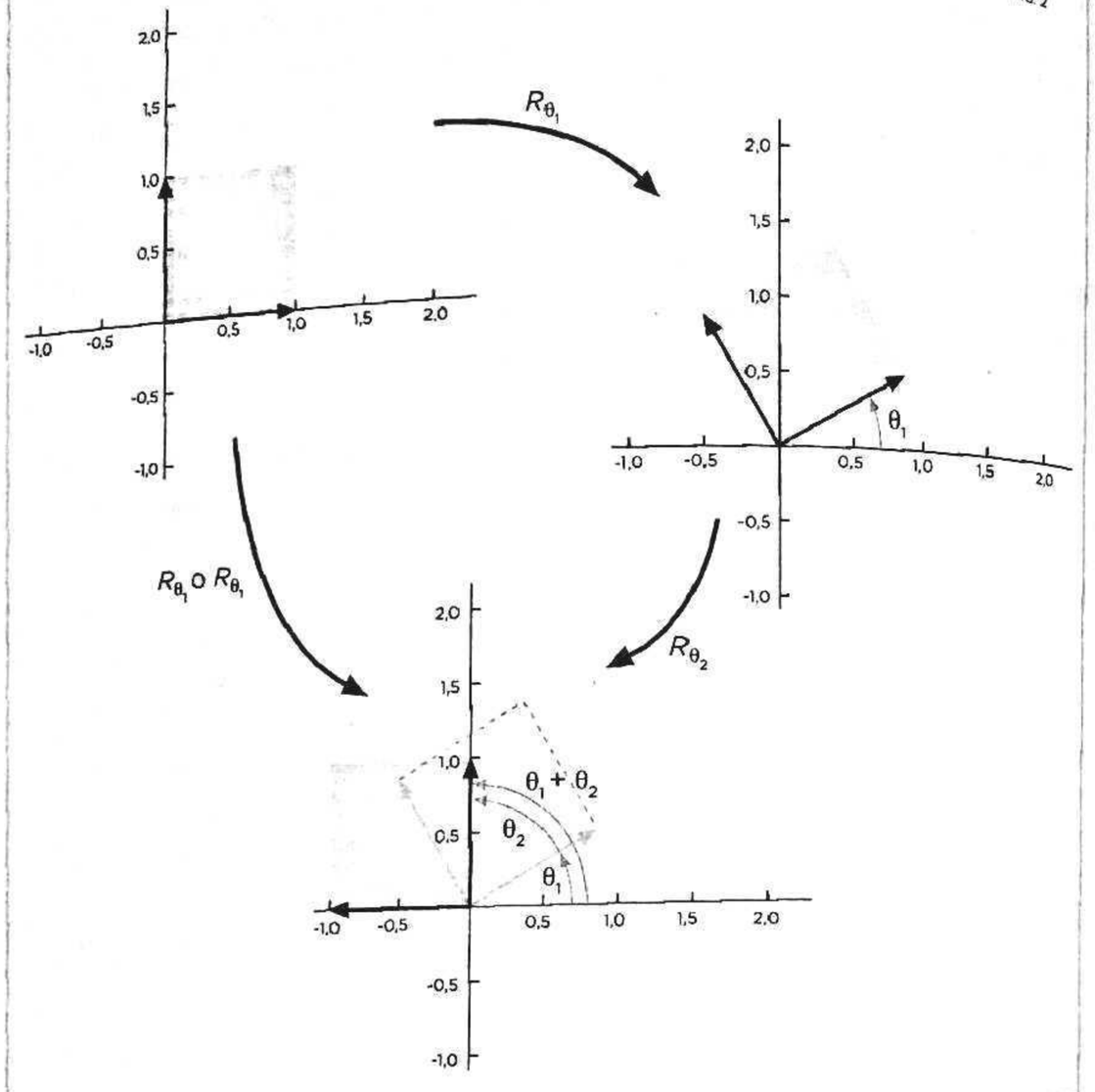
Las rotaciones del plano, $[\mathbb{R}]^2$, son aplicaciones lineales del tipo $R_\theta: [\mathbb{R}]^2 \to [\mathbb{R}]^2$, donde θ indica el ángulo de giro. Puesto que el ángulo puede ser cualquiera, hay muchas rotaciones que, reunidas, forman un grupo de transformaciones que suele denotarse $SO(2,\mathbb{R})$—*special orthogonal group*, o grupo ortogonal especial—. Si se toman dos rotaciones, R_θ y R_{θ_2} de $SO(2,\mathbb{R})$, se puede aplicar primero R_{θ_1} y a continuación R_{θ_2}. Se efectúa entonces una transformación que aúna los efectos de ambas rotaciones y que se denota de la siguiente manera:

$$\underbrace{R_{\theta_2}}_{\text{se aplica después}} \text{ o } \underbrace{R_{\theta_1}}_{\text{se aplica primero}}$$

En matemáticas, aplicar una transformación a continuación de otra se denomina «componer» y «o» es el símbolo de composición. La composición $R_{\theta_2} \text{o} R_{\theta_1}$ es una nueva transformación que será diferente de las dos iniciales, tal y como podrá apreciarse en la figura 2.

En el plano, es obvio que la composición de dos rotaciones produce otra rotación cuyo ángulo es la suma de las dos iniciales de modo que $R_{\theta_2} \text{o} R_{\theta_1} = R_{\theta_1 + \theta_2}$. Se tiene entonces que la composición toma un par de elementos de $SO(2,\mathbb{R})$, dos rotaciones, y los transforma en una nueva rotación que será también un elemento de $SO(2,\mathbb{R})$. Es decir, la composición, o, es una aplicación:

FIG. 2



$$o:\ SO(2,\mathbb{R}^2)^2 \to SO(2,\mathbb{R}^2)$$
$$(R_{\theta_1}, R_{\theta_2}) \to R_{\theta_2} o\, R_{\theta_1} = R_{\theta_1-\theta_2}$$

y es por lo tanto una operación en el grupo de las rotaciones del plano, $SO(2,\mathbb{R})$. Para ilustrar las ideas principales de la teoría de invariantes ya se vieron muchos grupos de transformaciones del plano y del espacio: el grupo de rotaciones del espacio que se

denota $SO(3,\mathbb{R})$, el grupo de las aplicaciones lineales con determinante distinto de cero designado como $GL(2,\mathbb{R})$ para el plano y $GL(2,\mathbb{R})$ para el espacio, el grupo de las transformaciones de Galileo, $SGaL(3,\mathbb{R})$. Para todos ellos la composición es cerrada. De modo que $o:SO(3,\mathbb{R})^2 \to SO(3,\mathbb{R})$, $o:GL(2,\mathbb{R})^2 \to GL(2,\mathbb{R})$ o $o:SGaL(3,\mathbb{R})^2 \to SGaL(3,\mathbb{R})$ son todas operaciones.

Se dispone ya de un plantel amplio de ejemplos de operaciones que involucran una gama igualmente extensa de objetos matemáticos diferentes, números, polinomios y transformaciones de todo tipo. Por supuesto, la lista de problemas matemáticos en los que intervienen operaciones de distinta índole resulta interminable, por lo que esto solo constituye una pequeña muestra.

No todas las operaciones son interesantes. Si se toma una tabla como la de la sección anterior y se rellena a capricho, lo más probable es obtener una operación que carezca de significado y utilidad de ningún tipo. Para que una operación sea matemáticamente interesante, debe satisfacer una serie de propiedades básicas. La primera cuestión es tener en cuenta que, por lo general, se tendrá que resolver cálculos en los que intervienen más de dos elementos, algo del tipo ▲⊕■⊕⬟. Pero ⊕ solamente puede operar dos elementos de una vez, así que este cálculo debe hacerse en dos pasos. La duda es cuál de las dos operaciones ⊕ hay que realizar en primer lugar. Se tienen dos opciones:

$$\underbrace{(\blacktriangle \blacksquare)\ \pentagon}_{\text{antes el } 1^{er}} \qquad \text{o bien } \blacktriangle \oplus \underbrace{(\blacksquare \oplus \pentagon)}_{\text{antes el } 2^{o}\oplus}.$$

Si las dos opciones producen resultados diferentes, no podrá asignarse a ▲⊕■⊕⬟ un valor concreto, ya que se tendría dos posibilidades en principio válidas. Una operación cumple la propiedad «asociativa» cuando ambas opciones conducen siempre al mismo resultado, valen igual. La propiedad asociativa garantiza que se pueden calcular operaciones en las que aparecen tres o más elementos sin ningún tipo de ambigüedad.

Todas las operaciones que aparecen en las secciones anteriores, la suma, el producto, ⊕ y ⊗ para el conjunto A, la composición, cumplen siempre la propiedad asociativa. Gracias a ello es posible

calcular sumas o productos en los que intervienen más de dos números, como:

$$3+5+9+12 \text{ o } 6\cdot 3\cdot 4\cdot 9.$$

ECUACIONES Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

La resolución de ecuaciones es una de las cuestiones fundamentales en álgebra. Para que las ecuaciones que se escriben con las operaciones tengan solución, deben cumplir las propiedades adecuadas. De forma progresiva, las ecuaciones más complejas necesitarán propiedades más exigentes; y cada tipo de ecuación precisa su propia «estructura algebraica» de operaciones.

En la sección anterior ya se ha resuelto una ecuación para el conjunto A y la operación $\oplus$. Este tipo de ecuaciones son las más sencillas posibles. La estructura dentro de la que se puede resolver se denomina «grupo».

Un conjunto A con una operación asociativa $\oplus$: $A^2 \to A$ forman un grupo cuando, no importa quiénes sean $a, b \in A$, para cualquier ecuación del tipo:

$$a \oplus x = b \text{ o } x \oplus a = b,$$

se puede encontrar un único elemento x de A que cumple la ecuación.

Efectivamente, antes, para A y $\oplus$ se ha podido resolver la ecuación $\pentagon \oplus x = \blacksquare$, que aparece para $a = \pentagon$ y $b = \blacksquare$, pero si se utiliza la tabla se puede encontrar sin problemas la solución de:

$$x \oplus \blacksquare = \pentagon, \text{ que sería } x = \blacksquare.$$

También se puede hallar la de $\blacktriangle \oplus x = \pentagon$, que es: $x = \pentagon$.

Asimismo, se puede averiguar la de $\blacksquare \oplus x = \blacksquare$, $x = \blacktriangle$. En definitiva, de cualquier otra ecuación que se pueda formar tomando a y b en $A = \{\blacktriangle, \blacksquare, \pentagon\}$. Además, las soluciones, x, son siempre

también elementos de A. Esto es así porque A y $\oplus$ forman un grupo.

No siempre es así. A y $\otimes$ no son un grupo, ya que hay ecuaciones para esta operación que no pueden resolverse. Por ejemplo:

$$\blacktriangle \otimes x = \blacksquare$$

no tiene solución, ya que puede comprobarse consultando la tabla de $\otimes$ que ningún x de $A = \{\blacktriangle, \blacksquare, \pentagon\}$ sirve.

Mucho más significativo es darse cuenta de que las cosas pueden torcerse con números y operaciones a las que se está acostumbrado. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ con + tampoco forman un grupo, ya que hay ecuaciones tan sencillas como:

$$x + 1 = 0$$

que no pueden resolverse utilizando números de $\mathbb{N}$. Efectivamente, cualquiera sabe que la única solución posible de esta ecuación es $x = -1$, pero -1 no está en $\mathbb{N}$. Para resolver esta ecuación se necesita un conjunto más grande de números que contenga también a los negativos: $\mathbb{Z}$.

El ejemplo más importante y representativo de grupo lo forman $\mathbb{Z}$ con +. Es obvio que si a y b son números enteros, entonces la ecuación:

$$x + a = b$$

puede resolverse como:

$$x = b - a$$

y el resultado es también un número de $\mathbb{Z}$. Con números de $\mathbb{Z}$ sí se pueden resolver todas las ecuaciones de este tipo, así que $\mathbb{Z}$ y + forman un grupo.

Exceptuando a $[\mathbb{N}]$ y $[\mathbb{N}][x]$, todos los conjuntos de números y polinomios que se han visto ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$) forman un grupo con +. Pero también los grupos de transformaciones con la composición son grupos. Por ejemplo, en el grupo de las rotaciones del plano $SO(2,\mathbb{R})$ una ecuación como:

$$R_{\frac{\pi}{6}} \circ x = R_{\frac{\pi}{2}}$$

es fácil de resolver utilizando la regla $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$. Así se tiene:

$$x = R_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}} = R_{\frac{\pi}{3}}.$$

Del mismo modo, las rotaciones del espacio, $SO(3,\mathbb{R})$, las transformaciones lineales con determinante no nulo, $GL(\mathbb{R}^2)$, y las transformaciones de Galileo, $SGalSO(3,\mathbb{R})$, son grupo con la operación o. Para dar el siguiente paso deben considerarse ecuaciones algo más complejas, como las ecuaciones lineales, de las que inmediatamente se aprende en primaria a resolver casos como:

$$2\cdot x+5=15 \text{ o } 3\cdot x-1=8,$$

en general son de la forma:

$$a\cdot x+b=c.$$

Para escribirlas, además del grupo que forman $\mathbb{Z}$ y +, se precisa una operación adicional: el producto. Después, las propiedades elementales de la aritmética y, de forma muy particular, la propiedad distributiva,

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

indican que las operaciones + y × son compatibles entre sí y permiten fácilmente manejar expresiones como las de arriba.

QUÉ SON LOS ANILLOS

La estructura algebraica que agrupa todos estos elementos y permite escribir ecuaciones de este tipo se llama «anillo». Un anillo es un grupo, A con la operación $\oplus$: $A^2 \to A$, junto con una operación adicional, $\otimes$: $A^2 \to A$. De modo que para cualquiera $a, b, c \in A$ se cumple:

1) $a\oplus b=b\oplus a$ —conmutativa de la suma—.
2) $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$ —asociativa del producto—.
3) $a\otimes(b\oplus c)=a\otimes b\oplus a\otimes c)$ —distributiva del producto respecto a la suma—.

En un anillo se tienen entonces tres operaciones que, además, cumplen reglas elementales de la aritmética, como la propiedad distributiva. En realidad, las condiciones adicionales —conmutativa de la suma y distributiva del producto respecto a la suma— de un anillo intentan reproducir o imitar las propiedades que se conocen para $\mathbb{Z}$, la suma y el producto.

Por supuesto, $\mathbb{Z}$ con + y × forman un anillo. De hecho, este es el ejemplo básico y paradigmático de anillo. Sin embargo, también A con $\oplus$ y $\otimes$, dadas por las tablas de la sección anterior, forman un anillo. Asimismo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, con + y ×, son anillos. Finalmente, un caso especialmente importante de anillo es el que forman los conjuntos de polinomios $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$ con las operaciones de suma y producto. La ambición siempre es la responsable de que se intente ir un paso más allá. Por ejemplo, si se presenta la ecuación lineal:

$$a\cdot x+b=c$$

resulta inevitable el deseo de resolverla. $\mathbb{Z}$ es un anillo en el que se pueden escribir ecuaciones lineales como $3\cdot x+2=9$, pero cuando se resuelve

$$3\cdot x+2=9 \Rightarrow x=\frac{9-2}{3}=\frac{7}{3}$$

se observa que la única solución posible no es un número de $\mathbb{Z}$. Los números de los que se dispone en $\mathbb{Z}$ no son suficientes para resolver esta ecuación. Ahora, se necesita un conjunto más amplio que incluya a las fracciones, esto es, $\mathbb{Q}$. Esta idea proporciona la pista para la siguiente estructura algebraica:

Un anillo, A junto con $\oplus$: $A^2 \to A$ y $\otimes$: $A^2 \to A$, se dice que es un «cuerpo» si A contiene al menos dos elementos, el producto es conmutativo y además para cualesquiera $a, b, c \in A$ (con $a \oplus a \neq a$), la ecuación

$$a \otimes x \oplus b = c$$

tiene una única solución $x \in A$.

$\mathbb{Z}$ no es un cuerpo, ya que $3 \cdot x + 2 = 9$ no tiene ninguna solución en $\mathbb{Z}$. Por el contrario, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, con + y ×, sí son cuerpos e incluso A con $\oplus$ y $\otimes$ es también un cuerpo.

Este camino ascendente de estructuras algebraicas, que marchan a la carrera tras las soluciones de ecuaciones cada vez más complejas, no termina aquí. La ecuación

$$x^2 = 2$$

no puede resolverse con números de $\mathbb{Q}$ y hace imprescindible pasar a $\mathbb{R}$. Más adelante, ecuaciones como:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + 5 = 0$$

no pueden resolverse con números de $\mathbb{R}$ y obliga a introducir un nuevo cuerpo: el «cuerpo de los números complejos», $[\mathbb{C}]$, que permite manejar raíces negativas como $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-5}$.

Existen además otros muchos tipos de combinaciones de conjuntos, operaciones y propiedades diseñadas para resolver diferentes tipos de problemas. Con el muestrario que se ha ofrecido, al menos se tiene idea de qué son las estructuras algebraicas y algunos escenarios con los que se suele topar.

EL RAZONAMIENTO DE LOS AXIOMAS

Los elementos de un grupo o un anillo pueden ser cosas variopintas: desde números de distinto tipo y polinomios, hasta rotaciones o transformaciones del espacio, incluso pequeños triangulitos. Sin embargo, ¿qué tienen todos ellos en común, si se trata de objetos tan dispares? Una transformación de Galileo y una fracción son cosas bien distintas, pero comparten la forma en que se relacionan mediante operaciones.

Las propiedades que rigen el modo en que se combinan dos transformaciones mediante composición y cómo se combinan dos fracciones mediante la suma, son similares. Si se eliminan los detalles sobrantes —que sean transformaciones, números o cuadraditos— y se atiende únicamente a los elementos esenciales comunes y las propiedades básicas que los gobiernan, se llega al concepto unificador de estructura algebraica. De los números, enteros, reales, los polinomios o el conjunto A = {▲, ■, ⬟} aquí únicamente importa una cosa: que siempre se tiene un grupo con la operación suma junto con una operación adicional que cumplen las propiedades 1) y 2) de los anillos.

En todos los casos se encuentra dichos elementos, que también cumplen esas mismas propiedades: los axiomas. Por tanto, cada estructura algebraica, grupo, anillo, cuerpo, etcétera, representa muchos casos y tipo de objetos diferentes que cumplen un conjunto común de axiomas básicos.

Desde la perspectiva de Emmy Noether carece de sentido estudiar números por un lado y polinomios o transformaciones por otro, como casos independientes. Uno de sus teoremas sería algo del tipo: «Sea A un anillo que satisface las propiedades...». Se habla directamente de una estructura algebraica sin que importe demasiado qué son sus elementos; de hecho, ese es un detalle que se desconoce, ya que no interesa en absoluto. Una vez se haya completado el resultado, será válido para cualquier anillo, o cualquier grupo, es decir, lo será para cualquier situación que se acoja a los axiomas de la estructura algebraica que se ha establecido.

Por todo ello, el estilo matemático que desplegó Emmy Noether resulta puramente axiomático. Después de ella llegarían otros matemáticos que, sin dudarlo, aplicaron sus resultados de modo concreto a polinomios, ecuaciones diferenciales, transformaciones o cualquier categoría de objetos que se ajustara a los axiomas. No obstante, sería injusto olvidar que Emmy Noether fue la impulsora y verdadera gran maestra en este modo de razonamiento que, desde el campo concreto del álgebra, terminaría inundando en buena medida al resto de las disciplinas matemáticas.

LOS «ANILLOS NOETHERIANOS»

El teorema fundamental de la aritmética no se denomina así en vano. Se trata de uno de los resultados de mayor trascendencia, tanto práctica como teórica, de todas las ramas de las matemáticas. A pesar de su importancia, el enunciado no es demasiado complicado: todo número entero, $n \in \mathbb{Z}$, puede descomponerse, de forma única, como un producto de potencias de números primos positivos en la forma:

$$n = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}.$$

De hecho, en la educación primaria se explica cómo encontrar esa descomposición. Si se le propone como ejercicio a cualquier escolar, por ejemplo, $n = 21$, tras unos segundos de cálculos sabrá que la «factorización», como se denomina, es:

$$21 = 3 \cdot 7.$$

Todas estas operaciones se desarrollan dentro del anillo $\mathbb{Z}, +, \times$, de modo que en este anillo el problema de factorizar siempre está resuelto, gracias al teorema fundamental de la aritmética.

Sin embargo, apareció rápidamente la necesidad de trabajar con otro tipo de números que condujeran también a otros tipos de anillos diferentes. Ya se ha indicado que la resolución de muchas ecuaciones hace necesario manejar raíces negativas como $\sqrt{-5}$, que es un número complejo de $[\mathbb{C}]$. Sumar y multiplicar expresiones en las que interviene $\sqrt{-5}$ no es complicado, simplemente, dejándose arrastrar por la notación, hay que tener en cuenta que $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = -5$. Entonces, se puede abordar cálculos como:

$$(2+3\sqrt{-5}) \cdot (1+3\sqrt{-5}) = 2+6\sqrt{-5}+3\sqrt{-5}+9(-5) = -43+9\sqrt{-5},$$
$$(2+3\sqrt{-5}) + (1+3\sqrt{-5}) = 3+6\sqrt{-5}.$$

Todas las expresiones de este tipo en las que interviene $\sqrt{-5}$ y números enteros son de la forma:

$$a + b\sqrt{-5}$$

y forman un conjunto que se denota $[\mathbb{Z}]\sqrt{-5}$, en el que se puede sumar y multiplicar.

Un conjunto con dos operaciones, $[\mathbb{Z}]\sqrt{-5}, +, \times$, forma un anillo. El problema está en que en un anillo como este, el teorema fundamental de la aritmética no funciona demasiado bien. La descomposición $21 = 3 \cdot 7$ sigue siendo válida, pero ahora, en $[\mathbb{Z}]\sqrt{-5}$, hay otra posibilidad:

$$21 = 3 \cdot 7.$$

y también $21 = (1+2\sqrt{-5}) \cdot (1-2\sqrt{-5})$.

Sin una forma única para obtener la descomposición, el teorema fundamental de la aritmética y todas sus aplicaciones se desvanecerían. La primera idea para salir de este atolladero la planteó el matemático Ernst Kummer (1810-1893). Según Kummer, se tiene dos descomposiciones distintas debido a que los números $3, 7, 1+2\sqrt{-5}$ y $1-2\sqrt{-5}$ pueden a su vez descomponerse en otros factores más pequeños, en la forma:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot b \\ 7 = c \cdot d \end{cases}$$

Con lo que se da la casualidad de que:

$$\begin{cases} 1+2\sqrt{-5} = a \cdot c \\ 1-2\sqrt{-5} = b \cdot d \end{cases}$$

de modo que :

$$21 = \underbrace{a \cdot b}_{=3} \cdot \underbrace{c \cdot d}_{=7} \text{ y } 21 = \underbrace{a \cdot c}_{=1+2\sqrt{-5}} \cdot \underbrace{b \cdot d}_{=1-2\sqrt{-5}}.$$

De esta manera, si se hallan esos otros factores más pequeños, el teorema fundamental de la aritmética seguirá cumpliéndose.

La dificultad estriba en que a, b, c, d no pueden encontrarse en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, sino que, según Kummer, hay que buscarlos en un anillo más grande. A los nuevos elementos de ese anillo más grande los llamó «ideales».

LA SOLUCIÓN DEFINITIVA

La solución definitiva vino de la mano de Richard Dedekind (1831-1916), un insigne matemático alemán por el que Emmy Noether sentía predilección. No solo lo citaba continuamente, sino que hacía repasar una y otra vez a sus alumnos algunos de sus textos originales, que consideraba pilares fundamentales en la formación de un matemático. Emmy Noether lo admiraba profundamente y resultaba habitual que en sus clases exclamara, con absoluta convicción: «Todo está ya en Dedekind».

La idea de Ernest Kummer para resolver el problema de la factorización única podría calificarse de vaga. Richard Dedekind se dio cuenta de que todo cuadraba a la perfección si en lugar de manejar simples números se trabajaba con el conjunto de todos sus múltiplos.

Cualquier número entero tiene multitud de múltiplos. Por ejemplo, hay infinidad de múltiplos de 3, como $2\cdot3$, $3\cdot3$, $4\cdot3$, etcétera. En realidad, son infinitos. Se pueden agrupar todos en un conjunto al que se denotará como (3), es decir,

$$(3)=\{\ldots,-4\cdot3,-3\cdot3,-2\cdot3,-1\cdot3,0\cdot3,1\cdot3,2\cdot3,3\cdot3,4\cdot3,\ldots\}$$

Lo mismo puede hacerse para 7 reuniendo todos sus múltiplos para obtener el conjunto (7), y del mismo modo para 21 se tendrá (21). Hay varias cuestiones sencillas sobre los conjuntos de múltiplos que son esenciales, pero aquí solo se hablará de (3). En cualquier caso, todo lo que se expone es válido para cualquier otro conjunto de múltiplos:

— La suma de dos múltiplos de tres sigue siendo múltiplo de 3. Por lo tanto, si se toma $m,n\in(3)$ se tendrá que $m+n\in(3)$. La suma es una operación cerrada en (3), de modo que (3) con + forman un grupo.
— Si un múltiplo de (3) se multiplica por un número entero cualquiera, el resultado seguirá siendo múltiplo de 3. Por tanto, para cualquier $n\in(3)$ y cualquier $z\in\mathbb{Z}$ tenemos que $n\times z\in(3)$.

— Se sabe que 6 es múltiplo de 3 y, por tanto, todos los múltiplos de 6 son también múltiplos de 3. Es decir, si 6 es múltiplo de 3, entonces (6) está incluido en (3).
matemáticamente se escribe $(6)\subseteq(3)$

Richard Dedekind no solo diseñó operaciones de suma y producto para estos conjuntos de múltiplos, sino que también desarrolló toda una aritmética completa y se dio cuenta de que la descomposición $21=3\cdot7$ se puede escribir también de forma equivalente como:

$$(21)=(3)\cdot(7).$$

Además, observó cómo el teorema fundamental de la aritmética para números enteros se podía traducir por completo a conjuntos de números y se dispuso a dar el salto a anillos que, como $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, eran más complicados.

La idea clave es la siguiente: $\sqrt{-5}$ no está en $\mathbb{Z}$ pero alguno de sus múltiplos sí, ya que, por ejemplo, $\sqrt{-5}\times\sqrt{-5}=-5$, que sí es un número de $\mathbb{Z}$ y por tanto el conjunto de múltiplos $(\sqrt{-5})$ está parcialmente contenido en $\mathbb{Z}$.

Del mismo modo, los números ideales de Kummer, a, b, c, d, no están en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ pero sus conjuntos de múltiplos, parcialmente, sí. Por ejemplo (a) no estará completamente dentro de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ pero sí parte de sus elementos. Si se llama I a los múltiplos de a que están en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ —es decir, $I=(a)\cap[\mathbb{Z}][\sqrt{-5}]$ es la intersección de ambos conjuntos—, es fácil deducir que I cumplirá las propiedades anteriores que se han señalado antes para los conjuntos de múltiplos. Esto motiva la definición de «conjunto ideal» o simplemente «ideal».

Un ideal es un subconjunto $I\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tal que:

—Dados $m,n\in I$ entonces $m+n\in I$ de modo que I, + forman un grupo.
— Dado $m\in I$ y $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, se tiene que $m\cdot z\in I$.

Dedekind extendió el concepto de número primo al definir lo que es un ideal primo y consiguió demostrar que el teorema fundamental de la aritmética es válido cuando se formula en términos de ideales primos. Así, por ejemplo, 21 se escribiría de forma única como producto de ideales primos en la forma:

$$(21)=Ia\cdot Ib\cdot Ic\cdot Id.$$

La idea genial de Dedekind resolvió el problema de la factorización en numerosas situaciones, lo que permitió un importante salto adelante en teoría de números.

Sin embargo, quedaban importantes preguntas sin respuesta. Los resultados de Dedekind demostraron toda su potencia en anillos de números y anillos de números complejos como $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, pero el concepto de anillo es más amplio. Se pueden considerar anillos de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ e incluso más generales.

EMMY NOETHER DA EN EL CLAVO

Desde los resultados de Dedekind en 1882, el estudio de los anillos de números y de polinomios se desarrolló de forma relativamente independiente. Cabía preguntarse si era posible una teoría unificadora que permitiera tratar ambos casos conjuntamente e incluso más, extender los resultados a ambientes más generales más allá de números y polinomios. Hubo que esperar a que la perspectiva integradora de Emmy Noether entrara en juego para dar respuesta afirmativa a estas cuestiones.

Su enfoque axiomático le permitió desarrollar la primera teoría abstracta general de anillos conmutativos e ideales que integraba los resultados para números y polinomios. La formulación axiomática ya no parte de una anillo concreto como $\mathbb{Z}[x]$ o $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En su lugar, se considera un anillo general, A junto con $\oplus: A^2 \to A$ y $\otimes: A^2 \to A$, y sobre este se reconstruyen los conceptos de ideales y los resultados de Dedekind. En la formulación general, se tiene que:

Un ideal es un subconjunto $I \subseteq A$ tal que

— *Dados* $m,n \in I$ entonces $m \oplus n \in I$ de modo que $I, \oplus$ forman un grupo.
— *Dado* $n \in I$ y $z \in A$, se tiene que $n \otimes z \in I$.

En realidad, de una forma más precisa, Emmy Noether introdujo los conceptos de «ideal por la izquierda» e «ideal por la derecha». Aquí se ha incluido la versión más simple para anillos conmutativos. En base a las nuevas definiciones abstractas, Emmy Noether estudió muchos de los resultados conocidos para casos particulares de forma unificada.

Con ello, avanzó de manera determinante en el conocimiento de las condiciones que son necesarias para que cada ideal pueda escribirse como un producto de ideales primos y disponer de resultados similares al teorema fundamental de la aritmética.

En el caso de $\mathbb{Z}$, cuando se calcula la descomposición de un número, por ejemplo n=60, en factores primos se suele comenzar probando con los divisores más pequeños para ir ascendiendo hacia los mayores. Al efecto, se aplica un esquema del tipo:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

En la columna de la izquierda, bajo 60, cada número es múltiplo del de abajo y se desciende en un proceso que siempre tiene un número finito de pasos hasta llegar a 1, que es el divisor más pequeño posible y no permite bajar más. Sin embargo, al aplicarse la observación 3) que se efectuó para conjuntos de múltiplos, se tiene que:

60 es múltiplo de 30 es múltiplo de 15 es múltiplo de 5 es múltiplo de 1

$$(60) \subset (30) \subset (15) \subset (5) \subset (1)=\mathbb{Z}$$

Por tanto, desde el ideal inicial (60) hasta el ideal final $(1)=\mathbb{Z}$, que es el conjunto completo, se llega siempre a través de una can-

tidad finita de eslabones que corresponde, cada uno, a un paso del proceso de descomposición.

Se puede demostrar que en $\mathbb{Z}$, cualquier ideal I es siempre de la forma $I=(n)$, para algún número $n\in\mathbb{Z}$. Entonces, aplicando el proceso de descomposición en factores de n que siempre tiene un número finito de pasos, se sabe que desde I se llega hasta $(1)=\mathbb{Z}$ mediante un número de eslabones, k, que podrá ser mayor o menor, pero siempre finito:

$$I\subset I_1\subset I_2\subset\ldots\subset I_k=(1)=\mathbb{Z}.$$

Esta condición se suele llamar «condición de cadena ascendente» e indica que una cadena de ideales que crecen —el siguiente es más grande que el anterior y lo contiene— siempre tienen forzosamente un número finito de eslabones. Como puede apreciarse, en $\mathbb{Z}$ se cumple la condición de cadena ascendente. Habrá otros anillos que la cumplan, y otros que no.

Las investigaciones de Emmy Noether permiten deducir que la condición de cadena ascendente es clave para que en un anillo abstracto se tenga un teorema fundamental de la aritmética y se pueda descomponer un ideal en potencias de ideales primos. Los anillos que cumplen esta condición se denominan, en honor a ella, «anillos noetherianos»:

—Un anillo, A, $\oplus$, $\otimes$, se dice que es un «anillo noetheriano» si cualquier cadena ascendente de ideales

$$I\subset I_1\subset I_2\subset\ldots\subset I_k\subset\ldots$$

tiene forzosamente un número finito de eslabones.

DECEPCIONES Y RECONOCIMIENTOS

Los logros de Emmy Noether en los campos que se han detallado no le valieron de inmediato ningún reconocimiento que estuviera

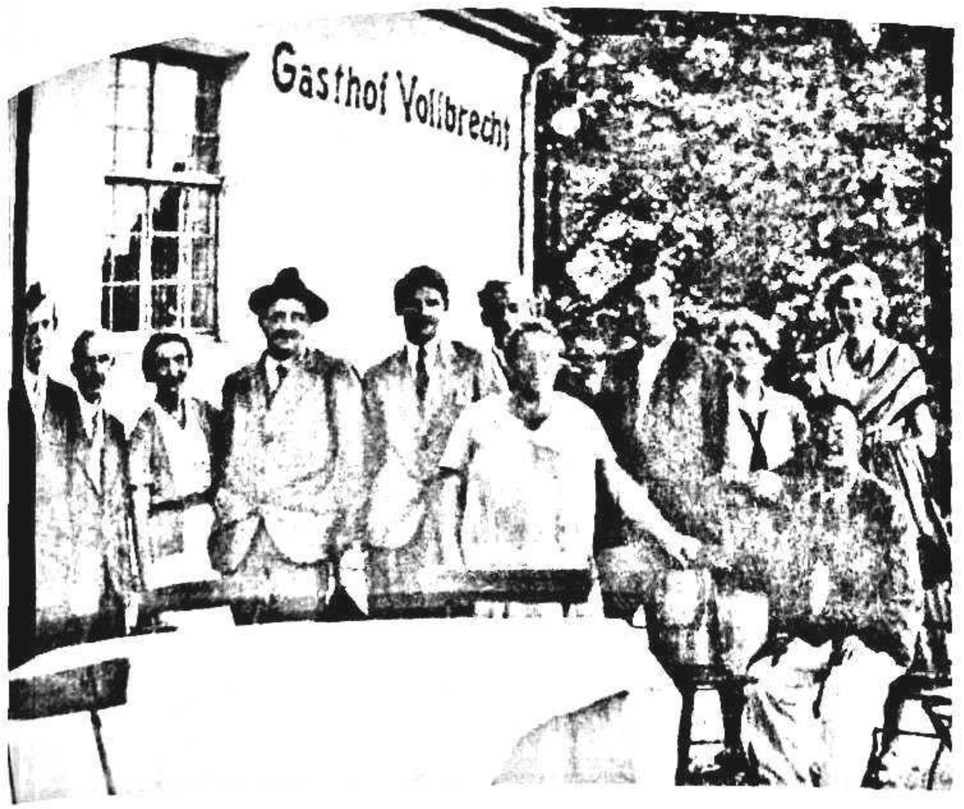
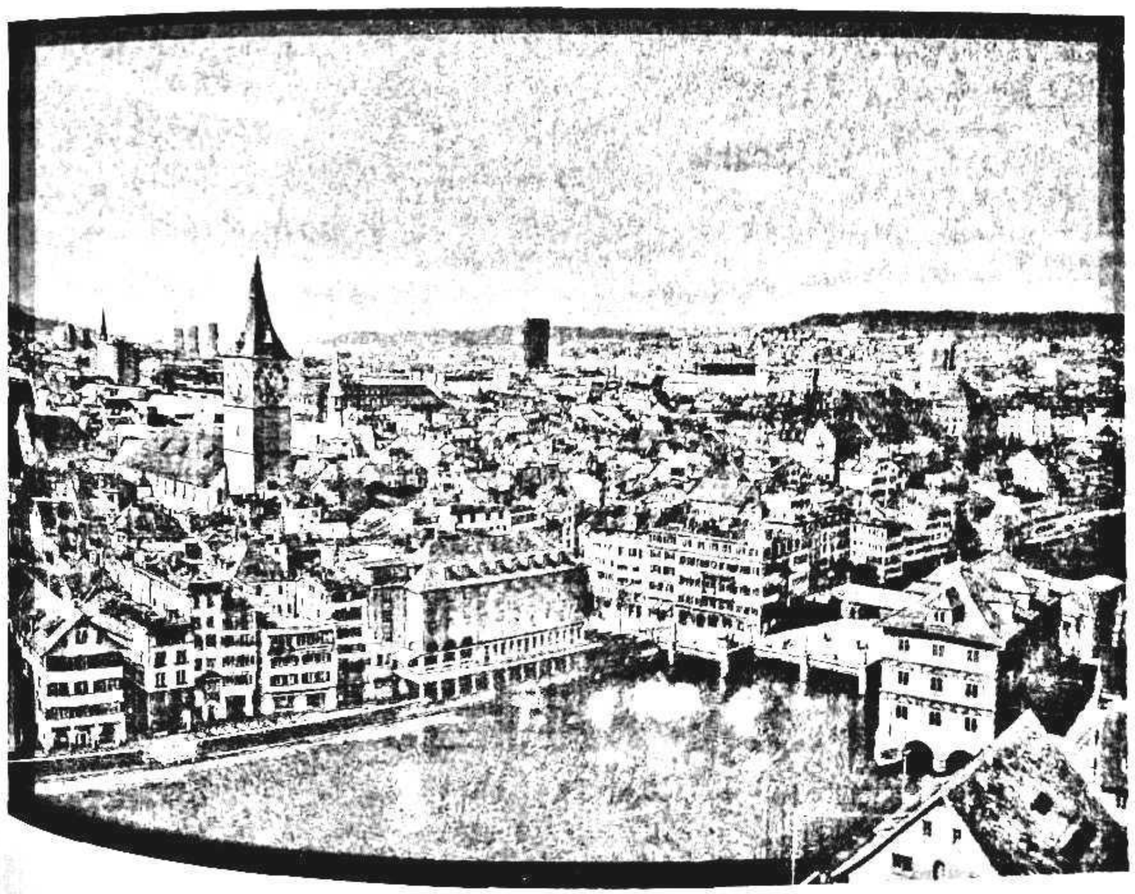


FOTO SUPERIOR: Reunión en 1932 de Emmy Noether con sus amigos y colegas matemáticos en Nikolausberg, cerca de Gotinga. Emmy Noether, en el centro, preside la escena. Detrás suyo asoma la cabeza de Emil Artin, y el hombre del sombrero es Hermann Weyl.

FOTO INFERIOR: Vista de la ciudad de Zúrich, sede del Congreso Internacional de Matemáticas en 1932 en el que Emmy Noether se consagró como figura mundial.



a la altura de sus aportaciones. Aunque siempre se distinguió por su carácter estoico, el cúmulo de sinsabores que se fueron alzando a su paso acabó haciendo mella en su espíritu. La muerte de los seres queridos, las dificultades para alcanzar la habilitación, la anómala y desesperante lentitud con la que discurrió su carrera docente, no disponer de un salario normal, no ocupar la plaza que realmente le correspondía, no ser premiada por sus hallazgos... la suma de todo ello pudo haberla sumido en la desesperación, pero no fue así. Por el contrario, se entregó en cuerpo y alma a las matemáticas y la investigación.

Lo que sí le dolió profundamente, según los testimonios de quienes la conocieron, fue no ser aceptada como miembro de la Academia de Ciencias de Gotinga y la falta de reconocimiento oficial de todo el trabajo realizado durante años para la revista *Mathematische Annalen*, en la que ejerció de editora principal. Mucho tiempo después, incluso convertida ya en una figura internacional, ambas injusticias se perpetuaron. En descargo de *Mathematische Annalen* cabe decir que la revista se apresuró a publicar el elogioso obituario que el matemático neerlandés Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996) escribiría para Emmy Noether en pleno nazismo. Sin duda, ensalzar la figura de una matemática de origen judío en aquel contexto fue un acto de valentía por parte de los responsables de la publicación, y el pago póstumo de una deuda que estaba en la mente de todos.

A pesar de estos y otros contratiempos, Emmy Noether sí recibió en vida algunas muestras de reconocimiento por su labor científica. En este sentido, 1932 fue un año memorable y puede tenerse, con seguridad, como la cumbre de su carrera. Emmy Noether cumplía cincuenta años de edad y ya era hora de reconocer, de forma unánime, el prestigio que había alcanzado.

De entrada, recibió junto a Emil Artin el Premio Alfred Ackermann-Teubner para la promoción de las ciencias matemáticas. Este galardón, con el que la Universidad de Leipzig les honró respectivamente por el conjunto de sus logros, trajo consigo una pequeña dotación económica. A continuación, los algebristas de Gotinga se encargaron del acto conmemorativo en honor de su medio siglo de vida. Para terminar, el matemático alemán Helmut

EL CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

La idea de una organización internacional que agrupara a los matemáticos de diferentes países partió de los grandes matemáticos alemanes, con Cantor y Klein a la cabeza, y culminó con la organización en 1897 del primer Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Zúrich. Las sucesivas ediciones, celebradas cada cuatro años, registraron momentos históricos en los que Hilbert y otros dictaron las conferencias que marcarían por décadas el rumbo de las matemáticas. Dado el innegable carácter universal de las mismas y que los alemanes fueron los padres de la idea, resultó doloroso que se les impidiera asistir a los congresos de 1920, en Estrasburgo, y 1924, en Toronto, por culpa de un veto impuesto a las potencias perdedoras de la Primera Guerra Mundial. Tal medida, de carácter político, resultaba odiosa para la comunidad matemática internacional. Finalmente, las presiones de los matemáticos británicos y estadounidenses forzaron la suspensión del veto, por lo que la edición de 1932 en Zúrich, que consagró a Emmy Noether, retomó el espíritu universal que nunca debió perderse. Así, la participación de los matemáticos alemanes tuvo un simbolismo especial que contribuyó al enorme impacto del discurso de Emmy Noether, doblemente discriminada hasta entonces como mujer y como alemana. Fue, además, la primera mujer en dictar una conferencia plenaria en el seno de estos congresos internacionales, un hecho que no volvería a repetirse hasta 1990, cuando la matemática estadounidense Karen Uhlenbeck (n. 1942) intervino en la edición celebrada en Kioto.

Estatua femenina en la Universidad de Zúrich, ciudad que acogió en 1897 la primera edición del Congreso Internacional de Matemáticas.

Hasse (1898-1979) publicó en la citada *Matematische Annalen* un artículo dedicado a la vida y obra de Emmy Noether. De la correspondencia que ambos mantuvieron, se deduce la sincera felicidad que le proporcionó este gesto.

El broche de ese maravilloso año y, posiblemente, el momento estelar en la vida de Emmy Noether, llegó con el Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en el mes de septiembre en Zúrich. Convertida en una figura internacional y rodeada de una nutrida representación de colegas alemanes, acudió como invitada de honor a aquel acontecimiento matemático mundial. La edición contó con 420 participantes y 247 delegados oficiales, pero solo un grupo de elegidos, las personalidades relevantes que representaban la vanguardia matemática del momento, fueron convocados para dictar alguna de las conferencias plenarias. En Zúrich, ella fue uno de esos 21 elegidos. La única mujer.

Aquel 7 de septiembre, cuando se encaminó hacia la tarima para «charlar matemáticas», se hizo un profundo silencio. Muchos de los presentes, especialmente los matemáticos alemanes, escucharon emocionados las palabras de una mujer que, más allá de haber cambiado la fisonomía del lenguaje matemático, se revelaba como un genio que mostraba a los demás los caminos por los que debían transitar; y todo ello, de forma amena y generosa. Al término del discurso, el auditorio prorrumpió en una ovación cerrada que certificó a las claras quién era la punta de lanza del futuro de las matemáticas: Emmy Noether. Aquella universitaria valiente a la que pronto elogiaron Einstein, Weyl y tantos otros, y a la que se auguró un horizonte prometedor... si dejaban de discriminarla.

Finalmente, triunfó la justicia. El discurso de Zúrich fue el punto culminante de una carrera científica que adquirió trascendencia y se hizo visible para todos. Tal y como señaló un informe histórico del propio Congreso Internacional de Matemáticas respecto a la edición de 1932, «en un país que en aquel tiempo no permitía votar a las mujeres, el congreso fue distinguido con la inclusión de una mujer matemática: Emmy Noether».

CAPÍTULO 4

Un adiós en la cumbre de las matemáticas

La irrupción del nazismo en Alemania trajo consigo un violento discurso antisemita y el despido fulminante de cientos de profesores y científicos. Este sombrío panorama motivó el exilio de Emmy Noether, que se trasladó a Estados Unidos en octubre de 1933. Allí pudo impartir clases y conferencias magistrales hasta que su vida se apagó de manera inesperada. Su legado, reivindicado de inmediato por las más grandes personalidades científicas, continúa hoy en día impregnando las matemáticas.

El reconocimiento obtenido en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1932 supuso el broche de oro a la carrera de Emmy Noether. Invadida por el optimismo, prolongó aquella sensación de felicidad pasando unos días de vacaciones entre los lagos y montes alpinos que rodean a la ciudad de Wengen, al sur de Zúrich. Posteriormente, se permitió otras jornadas libres más a su regreso a Gotinga, donde pronto arrancaría el próximo semestre. Sin embargo, esta etapa dorada, que tanto se merecía, comenzó a quebrarse a finales de julio de 1932 cuando el partido nacionalsocialista, encabezado por Adolf Hitler, consiguió 14 millones de votos y 230 escaños en el Parlamento.

¿Qué había pasado para que la sociedad alemana, la más sofisticada, culta y erudita del mundo, se hubiera decantado por una opción totalitaria y racista? La respuesta hunde sus raíces en la atmósfera de humillación y fragilidad que vivía Alemania desde su derrota en la Primera Guerra Mundial. La proclamación de la república de Weimar solo supuso un remiendo: el país, asfixiado por las severas condiciones impuestas por los vencedores y una terrible hiperinflación y desempleo, se precipitaba hacia la guerra civil. La espiral de asesinatos y revueltas en las calles protagonizados por extremistas de izquierda y derecha se convirtió en una escalofriante rutina que contribuyó a exasperar y radicalizar al pueblo alemán. Este, necesitado de soluciones,

depositó mayoritariamente su voto en quienes se las prometieron de inmediato: los nazis.

Así, el 20 de enero de 1933, Hitler fue nombrado canciller cuando todavía algunos creían que podrían mantenerlo bajo control. Sin embargo, los amenazadores desfiles con antorchas en Berlín y la aprobación de la Ley Habilitante del 23 de marzo dibujaron un futuro muy oscuro, especialmente para los judíos; y Emmy Noether no solo participaba de esta condición, sino que también se había significado en los últimos años por sus ideas socialistas.

EXPULSADA DE LA UNIVERSIDAD

Las consecuencias no se hicieron esperar. En el medio académico, el Ministerio de Ciencias, Arte y Educación comenzó en abril de 1933 a enviar órdenes de suspensión indefinida de la actividad docente para cientos de profesores. El mensaje que recibió Emmy Noether, una de las primeras en caer, fue simple, directo y aterrador: «Por la presente, retiro su permiso para enseñar en la Universidad de Gotinga».

Lo cierto es que su expulsión obedeció no solo al hecho de ser judía, sino también a la ideología política que profesaba. Hasta 1924, había mantenido un perfil de pacifista convencida y miembro del partido socialdemócrata muy bajo y discreto; apenas había cedido alguna vez su apartamento para reuniones de alumnos de izquierdas. Sin embargo, durante el semestre invernal de 1928-1929 ocupó una plaza de profesora invitada en Moscú, lo que evidenció sus coqueteos con el comunismo.

Emmy Noether no fue la única en recibir el mazazo. Otras grandes figuras de la matemática alemana también recibieron misivas similares, como Max Born (1882-1970) y Richard Courant (1888-1972). La situación se tornó dramática en cuestión de días para el profesorado, ya que la suspensión se acompañaba de la pérdida del salario. Así se esfumó la única fuente de ingresos de Emmy Noether, si bien disponía de una pequeña herencia para subsistir durante un tiempo.

A los problemas económicos se sumó una oleada de antisemitismo y violencia que mostraba a las claras que Alemania había dejado de ser el hogar de los judíos para convertirse en territorio hostil. Desde el exilio, Albert Einstein transmitió una recomendación que salvó la vida de muchas personas: abandonar el país de inmediato con la familia. Entre aquellos que decidieron huir figuraron hasta 16 premios Nobel, en lo que supuso una sangría científica que, no obstante, dejó indiferente a la Alemania nazi: sus jerarcas preferían con mucho la «limpieza de la raza».

De esta forma, la purga intelectual prosiguió su curso y la Universidad de Gotinga, desde la que Hilbert y Klein habían deslumbrado al mundo y en la que Emmy Noether había crecido como matemática, se convirtió en un erial. Cuando el nuevo ministro para la Ciencia y la Educación preguntó sonriente a Hilbert cómo estaban las matemáticas en Gotinga una vez «liberadas de la influencia judía», este replicó: «¿Matemáticas en Gotinga? Realmente, ya no hay». No exageró un ápice, pues Gotinga fue, con diferencia, la universidad más castigada de Alemania.

Este brutal escenario motivó que se articulase una «operación de salvamento científico» por parte de la comunidad internacional. Estados Unidos, el Reino Unido y otras naciones habilitaron mecanismos de emergencia para acoger a una masa variopinta de refugiados académicos. Dicha solidaridad no ocultaba el lógico interés por beneficiarse de las aportaciones de genios como, por ejemplo, el citado Einstein. En cualquier caso, resultó una providencial tabla de salvación para muchos científicos alemanes.

TRES DESTINOS POSIBLES

Abandonarlo todo de repente es duro. A fin de cuentas, nadie podía saber si los nazis permanecerían en el poder, y no pocos creyeron que la situación sería transitoria. En este sentido, incluso se presentó una apelación ante el ministerio para que Emmy Noether fuera rehabilitada en su puesto, que de nada sirvió. Quien sí lo tuvo claro fue Hermann Weyl, que asumió la dirección del Instituto de

Matemáticas de Gotinga ante la destitución fulminante de Richard Courant. Desde el primer momento, Weyl trazó planes urgentes para que Emmy Noether se exiliara a Estados Unidos y escapara de aquella pesadilla.

El propósito inicial era que recalara en Princeton, donde sería acogida en condición de profesora invitada, pero llegaron las propuestas de dos instituciones universitarias más: el Somerville College de Oxford, en Inglaterra, y el Bryn Mawr College, en Estados Unidos. También se contempló una tercera posibilidad, la Universidad Estatal de Moscú, donde un buen amigo suyo, Pavel Alexándroff, realizó intensas gestiones para darle una posición; estas, finalmente, fueron denegadas.

«Noether es una gran personalidad; la más grande mujer matemática que ha vivido jamás; la más grande mujer científica de cualquier disciplina con vida y una académica, como mínimo, al mismo nivel que Madame Courie.»

— NORBERT WIENER.

Hacia septiembre de 1933, Emmy Noether parecía más inclinada por la opción británica. Sin embargo, después de una serie de negociaciones con la Fundación Rockefeller, se aprobó una beca para ella en el Bryn Mawr College. Probablemente hubiera preferido Oxford o Princeton, pero los acontecimientos se agravaban por días en Alemania y las posibilidades se reducían con rapidez. La masa de profesores refugiados se convirtió en un problema para los países de acogida y no quedaba tiempo para más dudas. Finalmente, en octubre de 1933, Emmy Noether se marchó a América. Su destino: el Bryn Mawr College.

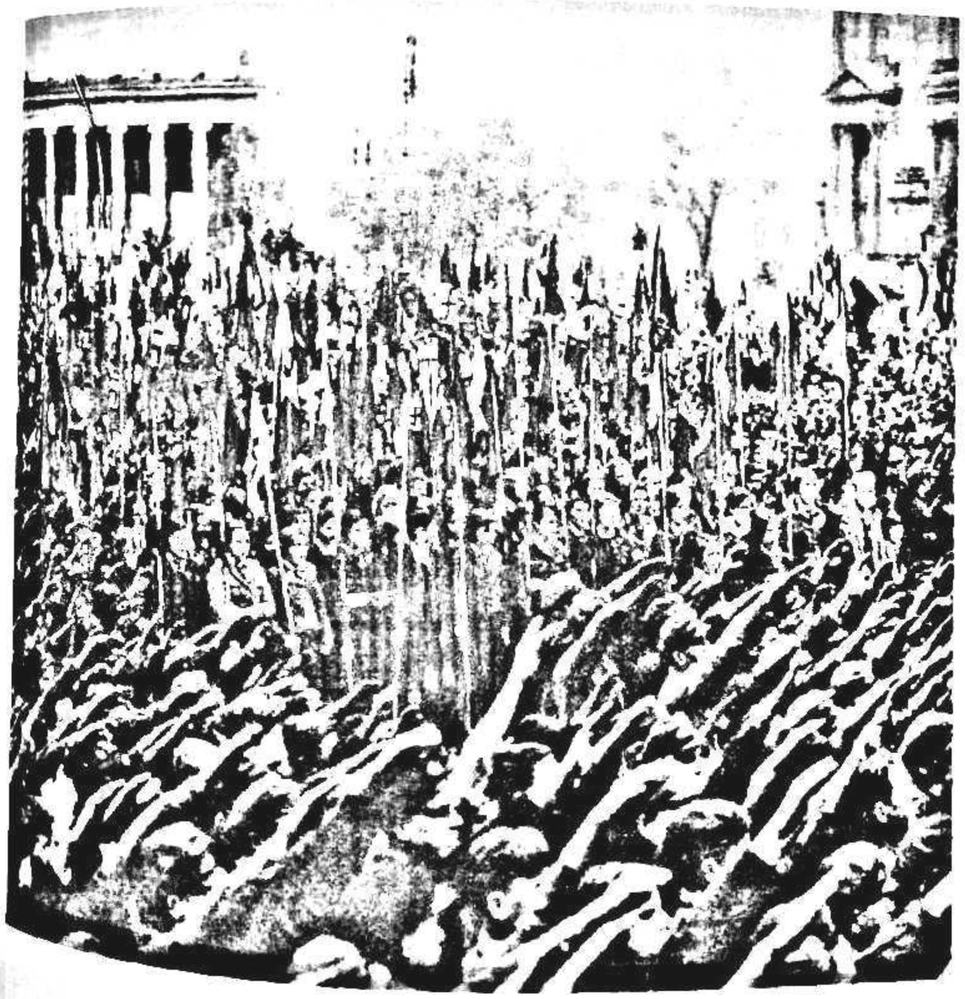
UN NUEVO HOGAR: ESTADOS UNIDOS

Bryn Mawr es una pequeña localidad del estado de Pensilvania que solo dista 18 kilómetros de la capital, Filadelfia. Su fundación

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
El más célebre exiliado del nazismo, Albert Einstein, defendió siempre la valía de Emmy Noether.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Una de las escasas fotos de Emmy Noether en su madurez, feliz, en Estados Unidos.

FOTO INFERIOR:
Concentración de las Juventudes Hitlerianas en 1933, año en que Emmy Noether decidió abandonar Alemania.



UNA UNIVERSIDAD FEMENINA: EL BRYN MAWR COLLEGE

El Bryn Mawr College imita el estilo gótico de Cambridge, por lo que se considera uno de los campus universitarios más bellos de todo Estados Unidos. Forma parte de las «siete escuelas hermanas», nombre con el que se agrupa a las siete primeras universidades estadounidenses creadas exclusivamente para mujeres, entre 1837 y 1889. En concreto, el Bryn Mawr College fue fundado en 1885 por los cuáqueros, una comunidad religiosa que se extiende fundamentalmente por el estado de Pensilvania y cuyos orígenes se remontan a la Inglaterra del siglo XVII. Desde el punto de vista académico, el Bryn Mawr College es un *Liberal Arts College*, es decir, una universidad dedicada a estudios de grado, normalmente de cuatro años, en disciplinas liberales. Estas deben entenderse como los estudios en literatura, filosofía, matemáticas y las ciencias que intervienen en la formación de un profesional liberal; todo ello, orientado a la inserción de la mujer en el terreno profesional.

Las «siete escuelas hermanas» constituyen el grupo más elitista de universidades femeninas de Estados Unidos y cinco de ellas continúan siendo exclusivamente para mujeres: entre ellas, el Bryn Mawr College, si bien un par de años antes de la llegada de Emmy Noether comenzó a aceptar alumnos varones para los estudios de posgrado.

Vista del edificio Rhoads Hall en el campus del Bryn Mawr College, donde Emmy Noether ejerció en sus últimos años.

respondió a la construcción de la línea de ferrocarril que conecta Filadelfia con el oeste. En la actualidad, Bryn Mawr apenas supera los 4000 habitantes, es decir, un millar más que a la llegada de Emmy Noether. Se trata de una zona residencial para familias acomodadas que, a pesar de su pequeño tamaño, cuenta con dos universidades, ambas en torno a los 1600 estudiantes: el Harcum

College y el Bryn Mawr College. Emmy Noether apenas había oído mencionar el nombre de su nueva ciudad hasta el momento en que la pisó por primera vez, pero allí se la esperaba como si fuera una celebridad. ¿Y acaso no lo era?

Consciente de la talla científica de aquella profesora que huía de los nazis, la rectora del centro, Marion Edwards Park (1876-1960), muy implicada en el rescate e inserción de los académicos europeos, le prodigó una calurosa bienvenida. Park ya había establecido líneas de colaboración con otras instituciones universitarias, por lo que el Bryn Mawr College no era ajeno a la dinámica habitual de intercambios académicos y científicos. En noviembre de 1933, entusiasmada por su nuevo fichaje, Park escribió a una amistad en los siguientes términos:

> Me aventuro a preguntarte si por alguna casualidad no podrías dejarte caer por Bryn Mawr y ver a la doctora Noether en acción.

El apoyo incondicional de la rectora resultó muy importante para Emmy Noether, que también se sintió afortunada al conocer a la directora del Departamento de Matemáticas: Anna Johnson Pell Wheeler (1883-1966). A su llegada a Estados Unidos, se había sentido muy sola, lejos del hogar, de sus amigos, sus colegas y, sobre todo, de su hermano Fritz y sus sobrinos, la única familia que le quedaba. Para colmo, le apesadumbraba la deriva que estaba tomando Alemania y se preguntaba cuánto tiempo más se prolongaría la beca que le había permitido entrar en el país. Por ello, conocer a dos personas como Marion Edwards Park y Anna Johnson Pell Wheeler la reconfortó sobremanera.

Pronto encontró en Anna a alguien con quien «charlar matemáticas» a todas horas e incluso comentar anécdotas de los viejos profesores y pasillos de la Universidad de Gotinga; casualidades del destino, Anna había disfrutado allí de una beca durante la preparación de su doctorado, entre 1906 y 1908, y había escuchado las lecciones de Hilbert y Klein en las mismas aulas en las que, solo unos años después, se sentaría Emmy.

Lo cierto es que ambas tenían muchas cosas en común. Así como el talento matemático de Emmy había crecido arropado por

su padre, en el caso de Anna había sido espoleado por el que luego sería su primer marido, Alexander Pell, también matemático —y curiosamente, espía doble ruso—. Ambas habían también estudiado con los mejores matemáticos de su tiempo y sufrido del mismo modo la discriminación que conllevaba ser mujer en la universidad.

Emmy Noether no estaría con nadie más del ambiente de Gotinga. Así como Weyl y otros ilustres exiliados compartieron destino en la Universidad de Princeton, ella se quedó sola en una pequeña universidad con un departamento de matemáticas que apenas contaba con cinco profesores y escasas posibilidades para reclutar a los mejores alumnos. Sin duda, este trago hubiera sido doblemente amargo de no contar con una amistad como la de Anna. La rectora del Bryn Mawr College se apresuró a proveer los medios para que Emmy Noether pudiera trabajar en las mejores condiciones. De hecho, promovió incluso la creación de una beca especial: la *Emmy Noether Fellowship*, destinada a dar la oportunidad a alumnos brillantes para trabajar con ella.

Ese mismo invierno, la doctora Noether creó su propio grupo de trabajo, integrado por otro profesor y tres prometedoras estudiantes; de ellas, comentó que devoraban los nuevos tratados recién llegados de Alemania, donde se recogía por primera vez el álgebra moderna que Emmy Noether había ayudado a levantar. Poco a poco, el grupo se nutrió con la incorporación de jóvenes y brillantes profesoras o investigadoras recién doctoradas que, en algunos casos, habían renunciado a otras becas para poder trabajar con una leyenda viviente de las matemáticas. De nuevo, como hizo en Gotinga, Emmy había reorganizado a sus «chicos Noether»; solo que esta vez, eran las «chicas Noether».

CHARLAS EN PRINCETON Y VISITA A ALEMANIA

El problema de la ubicación definitiva de Emmy Noether se mantuvo abierto incluso después de su llegada al Bryn Mawr College, una institución que, al fin y al cabo, no contaba con una estructura sólida de investigación. La Rockefeller Foundation, que financiaba

la beca de la doctora Noether, fue consciente de la situación e impulsó los trámites para trasladarla a otra universidad más acorde con su perfil investigador.

Probablemente, esta fue una de las causas de que Emmy Noether fuera invitada a impartir conferencias en el recién creado Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, que entonces tenía su sede en la Universidad de Princeton, pero se consolidó como una institución diferente.

UN INSTITUTO AVANZADO EN TODO

Emmy Noether impartió conferencias magistrales en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, un centro privado independiente que se dedica de forma exclusiva a la investigación posdoctoral. Creado en 1930, este centro se convirtió de inmediato en uno de los polos de desarrollo científico e intelectual más importantes del mundo, condición que mantiene en la actualidad. Según uno de sus fundadores, Abraham Flexner (1866-1959), el propósito fue abrir en Estados Unidos una institución de investigación a imagen de las que existían en Europa, en la que la discusión y el debate intelectual pudieran fluir libremente. Desde su creación, el centro aplica una estricta política de no discriminación por motivos de raza, religión, sexo o cualquier otro tipo, lo que contrastó con la política inicial de otras instituciones de su entorno: por ejemplo, la mencionada Universidad de Princeton, que no aceptaba a mujeres. Por esta circunstancia, Emmy Noether se refería a ella como «la universidad de los hombres, donde ninguna mujer es admitida».

El Instituto de Estudios Avanzados, en Princeton, no dudó en acoger desde 1934 las conferencias magistrales de Emmy Noether.

El Instituto de Estudios Avanzados cobró fama por haber acogido a muchas de las grandes personalidades exiliadas de Europa: entre otros, Albert Einstein, Hermann Weyl, John von Neumann (1903-1957) y Kurt Gödel (1906-1978). En febrero de 1934, Emmy Noether comenzó a impartir un ciclo semanal de lecciones y quedó gratamente impresionada por la atmósfera y el nivel matemático que el centro había conseguido en tan poco tiempo. En sus propias palabras, «en parte, sus estándares en matemáticas son ya muy buenos». Con esta sentencia, reconoció que el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton estaba llamado a alcanzar la misma importancia que había tenido la Universidad de Gotinga, desprovista de su capital humano por los nazis.

Emmy Noether solía utilizar el tren para desplazarse a Princeton, aunque a veces lo hacía en el vehículo particular de Anna y en la compañía de alguna de sus estudiantes, que la adoraban. En su correspondencia privada reveló que había comenzado a atraer hacia sus planteamientos abstractos a alguno de los estudiantes de Princeton, de modo que su círculo de alumnos probablemente se habría extendido aún más de no haber tenido la historia un final tan precipitado.

En el verano de 1934, Emmy Noether regresó a Alemania para ver a sus seres queridos y atender diversas cuestiones: entre ellas, deshacerse de su pequeña casa. Aunque solo le restaba un año de beca en el Bryn Mawr College, sabía que Hermann Weyl y el resto de sus contactos en Princeton removerían cielo y tierra para prolongar su estancia en Estados Unidos. Con seguridad, intuyó que nunca más regresaría a Alemania, por lo que ese viaje suponía el último encuentro con su patria, su familia y su universidad. Lejos quedaba la infancia, aquellos tiempos felices en los que practicaba danza en Erlangen y jugaba con sus hermanos y amigos; cuando ser judío, no era objeto de persecución.

El encuentro con su querido hermano Fritz la emocionó profundamente. Este, que ni siquiera tenía 50 años, había sido obligado a abandonar su plaza de profesor en la Universidad de Breslau y forzado a aceptar la jubilación, lo que encaminaría sus pasos hacia la Unión Soviética. Emmy Noether también sentía un enorme afecto por la esposa de su hermano, Regina, y por los dos hijos que

EL HERMANO QUE HUYÓ A LA UNIÓN SOVIÉTICA

Como se explicó, Emmy Noether tuvo tres hermanos, Alfred, Fritz y Gustav Robert. Después de quedar huérfana de madre en 1915, Emmy Noether vio sucumbir tres años más tarde a Alfred, cuya naturaleza enfermiza no pudo soportar las privaciones que trajo consigo la Primera Guerra Mundial. En 1921 le tocó el turno al padre, y en 1928, tras una convalecencia permanente, murió Gustav Robert. Esto dejó a Emmy Noether en la sola compañía de su hermano Fritz (1884-1941), que también fue un matemático de talento. Su relación fue tan estrecha y afectuosa que compartieron frecuentemente las vacaciones, donde les acompañaban la esposa de Fritz y sus hijos. Sin embargo, esta feliz imagen se hizo trizas con el ascenso nazi. Emmy y Fritz fueron expulsados de su posición académica y abocados a exiliarse: pero mientras ella lo hizo hacia el Este, él se marcharía hacia el Oeste, a la Unión Soviética. Emmy se reencontró con Fritz durante su breve visita a Alemania, en 1934; después, nunca volvería a verlo. Durante sus primeros años en la Unión Soviética, Fritz, con el aval del doctorado que había obtenido en Múnich, sus investigaciones de matemática aplicada y su carrera en las escuelas de ingeniería de Karlsruhe y Breslau, ocupó una plaza de profesor en la Universidad de Tomsk. Sin embargo, pronto se percató de que había huido de un totalitarismo criminal para caer en otro: así, en noviembre de 1937, durante la Gran Purga impulsada por el dictador Iózif Stalin (1878-1953), fue falsamente acusado de ser un espía alemán y un saboteador.

Un final desolador

Condenado a 25 años de prisión, no bastó con la brutalidad del presidio: cuatro años más tarde, fue declarado culpable de «agitación antisoviética» y ejecutado el 10 de septiembre de 1941. Todos estos detalles fueron ocultados a su familia durante 47 años. Finalmente, su hijo Hermann apeló a Mijail Gorbachov y el régimen comunista reconoció en 1988 que el profesor Fritz Noether había sido condenado y ejecutado sin prueba alguna.

El dirigente soviético Iózif Stalin en 1937, año de la Gran Purga que se cobró la vida de miles de personas.

aquella feliz pareja había tenido, Hermann y Gottfried. Se dio la circunstancia de que este último tenía dotes para las matemáticas, lo que enorgulleció profundamente a Emmy Noether.

Como parte de su recorrido sentimental, también visitó a Emil Artin y su familia en Hamburgo y, finalmente, se desplazó a Gotinga, donde apenas quedaba alguno de sus colegas, estudiantes y amigos. Este acto nostálgico le afectó de forma considerable. Sin duda, ver empequeñecida aquella luminosa universidad y tener que despedirse para siempre de tantos hizo mella en su espíritu. A su regreso en Estados Unidos, fueron muchos los que apreciaron en ella un cambio de humor.

UN DESENLACE INESPERADO PARA TODOS

El cuadro que dibujan los últimos meses de 1934, tras el fugaz viaje a Alemania, y los primeros meses de 1935, muestra una sucesión de escenas amables. La visita semanal a Princeton tenía el aliciente extra de las provechosas charlas con Weyl y otros. De vuelta al Bryn Mawr College, Emmy Noether disfrutaba de los paseos con sus chicas, en los que se hablaba de matemáticas sin descanso; el mismo tema presidía las conversaciones vespertinas, en las que solía tomar el té con Anna. De esta forma, el tiempo transcurrió plácidamente, envuelto en una agradable rutina matemática.

De repente, el 8 de abril de 1935, Emmy Noether ingresó en el hospital de Bryn Mawr para ser operada de un quiste en un ovario. Muy poca gente conocía la noticia, que ella consideraba un pequeño inconveniente; incluso se permitía bromear con que la cirugía le daría la oportunidad de lucir una figura algo más delgada. Un día antes de su ingreso, escribió una larga carta a Helmut Hasse en la que discutía problemas matemáticos, hablaba de sus conocidos, le preguntaba por sus planes estivales y expresaba sus intención de volver a visitar Alemania tras la ceremonia de graduación en Bryn Mawr. Ningún comentario sobre hospitales, cirugías ni doctores.

Tras la intervención, el día 10 de abril, Emmy Noether se recuperó con normalidad. Durante los siguientes cuatro días, incluso pudo recibir algunas visitas. De repente, entró en coma, al tiempo que su temperatura ascendió de forma anómala y alarmante. Fue así como una violenta e inesperada infección posoperatoria acabó con su vida, el 14 de abril de 1935. Tenía solo cincuenta y tres años de edad.

La noticia causó una verdadera conmoción, ya que la mayoría no sabía nada del asunto y el resto confiaba en que la recuperación seguía su curso normal. El propio Helmut Hasse tuvo que ser informado por Fritz, el hermano de Emmy, quién recibió la noticia por medio de un telegrama. El texto del mismo únicamente le anunciaba la defunción de su hermana, tras una operación de la que él mismo no había tenido conocimiento ninguno.

Después de eso, los protocolos discurrieron de la manera habitual. La noticia apareció al día siguiente en el *New York Times* y el cuerpo fue incinerado en una ceremonia a la que asistieron los estudiantes y amigos más cercanos. La urna con sus restos mortales fue depositada bajo el pavimento del claustro que rodea al patio principal de la biblioteca del Bryn Mawr College, donde una sencilla placa recoge las iniciales de Emmy Noether.

EL HOMENAJE DE LOS MÁS GRANDES

Unos días más tarde, el 19 de abril, la Sociedad Matemática Americana guardó un minuto de silencio en su honor durante un encuentro celebrado en la Universidad de Columbia, en Nueva York. Más emotivo fue el extenso y bellísimo elogio que Hermann Weyl le dedicó el 26 de abril durante la ceremonia religiosa que se ofició en su memoria en el Goodhart Hall, escenario de sus últimas clases.

Otra eminencia que honró el recuerdo de Emmy Noether fue Albert Einstein. No hay constancia de que la conociera personalmente, aunque quizás ambos tropezaron más de una vez por los pasillos del Instituto de Estudios Avanzados. Sin embargo, es evidente que Einstein, a pesar de que el grueso de la producción de Emmy Noether estaba dedicado al álgebra más abstracta —sin relación directa con la física—, conocía a fondo sus trabajos matemáticos:

sobre todo, su impactante resultado sobre leyes de conservación, el teorema de Noether. El 5 de mayo de 1935, el *New York Times* publicó una carta de Albert Einstein en la que elogió largamente a Emmy Noether, recientemente desaparecida. La misiva comenzaba en estos términos: «A juicio de los matemáticos vivos más competentes, la señorita Noether fue el genio matemático creativo más importante que haya existido desde que comenzó la educación superior para las mujeres. En el campo del álgebra, en el cual los matemáticos más talentosos han estado ocupados por siglos, descubrió métodos que han probado ser de una importancia enorme en el desarrollo de la actual generación de matemáticos jóvenes».

«Dos rasgos determinaban por encima de todo su naturaleza. Primero, el innato poder productivo de su genio matemático. Segundo, su corazón no conocía la malicia. Entre sus compañeros, la memoria de su trabajo en ciencia y su personalidad no se olvidarán fácilmente.»

— HERMANN WEYL

Einstein se congratuló de que, pese a las discriminaciones sufridas y su expulsión por culpa del nazismo, Emmy Noether hubiese tenido «amigos visionarios de la ciencia en este país» que gestionaran su acomodo en Bryn Mawr y Princeton, así como que encontrase «pupilos agradecidos, cuyo entusiasmo hizo de sus últimos años los más felices y quizá los más fructíferos de su carrera entera». Entre las bellas frases que poblaron la carta de Einstein, quizá sea esta la que mejor retrató a Emmy Noether: «La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas».

Dado que Einstein se había convertido desde su llegada a Estados Unidos en una extraña mezcla de embajador de los refugiados alemanes, rescatador de talentos y eficaz agente de colocación, sus palabras adquirieron casi un tono oficial; de hecho, se le consideraba el representante de la ciencia alemana en el exilio.

Más allá de las muestras oficiales de dolor, la pérdida de Emmy Noether supuso un fuerte golpe para el grupo de refugiados de Gotinga. El impacto no fue menor en Alemania, donde Helmut Hasse y otros muchos lloraron su desaparición. En su reunión del 26 de septiembre de 1935, la Sociedad Alemana de Matemáticas la citó como uno de los catorce miembros de la sociedad fallecidos ese año: de inmediato, los asistentes, a pesar de lo peligroso que resultaba significarse bajo el nazismo, se levantaron de sus sillas en señal de respeto.

EL LEGADO DE EMMY NOETHER

Emmy Noether contribuyó enormemente al progreso de la matemática con su método axiomático, que revolucionó el álgebra, y con varios hallazgos que recibieron su nombre y ya se han explicado con detalle: el teorema de Noether y los «anillos noetherianos». Estas y otras aportaciones no solo ensancharon el horizonte matemático de la época, sino que se hallan plenamente vigentes en la actualidad

Cabe añadir que en su última etapa, que abarca también el período de Bryn Mawr, centró su atención en el estudio de anillos no conmutativos y trabajó intensamente los conjuntos de números hipercomplejos. Precisamente, la definición de «anillo» que hoy en día se explica en todas las universidades del mundo es, fundamentalmente, la que ella formuló. Si bien Hilbert fue el primero en utilizar el término *ring* —anillo— como sinónimo de *Zahlring* —anillo de enteros— para referirse al conjunto de números que podían obtenerse a partir de ciertos números complejos mediante las operaciones de suma y producto con números enteros —y que eran cerrados para estas operaciones, es decir, la suma y el producto de dos números del conjunto seguían estando en el conjunto—, con ello tan solo transmitió una idea atractiva: que un anillo es algo de lo que no puede escaparse nada de lo que hay dentro, a pesar de que se modifique con sumas y productos.

Sin embargo, Hilbert nunca explicó por qué uso esa palabra, ni tampoco por qué ese mismo comportamiento cerrado, tipo anillo, se encuentra también en otras estructuras, como los grupos

o los cuerpos. En 1915, un matemático israelí de origen alemán, Adolf Fraenkel (1891-1965), fue el primero en elaborar una definición más o menos axiomática de anillo, pero solo se aplicaba a un conjunto de casos particulares. La primera axiomatización del concepto de anillo como se conoce hoy en día se debe, por tanto, a Emmy Noether: se halla en sus trabajos sobre teoría de ideales y luego fue recogida por Van der Waerden en su obra *Álgebra moderna*, que se convirtió en el manual de referencia en álgebra.

En definitiva, no se puede concebir el álgebra moderna sin la gigantesca contribución de Emmy Noether, aquella mujer a la que se quiso cerrar el paso a la universidad, a la que no se le pagaba su labor docente, ni se le reconocía oficialmente su categoría, y que tantos impedimentos tuvo que sortear a lo largo de su trayectoria profesional. De todo ello salió victoriosa, para inscribirse con letras de oro en la historia de las matemáticas.

«UNA HOGAZA DE PAN CALIENTE»

La talla humana de Emmy Noether también merece ser recordada. Fue una persona entregada a los demás, una mujer valiente y una profesora singular, totalmente arrebatada por las matemáticas; al extremo de que en sus clases hablaba sin parar durante horas, lo que llevaba a bastantes a consultar su reloj. Así lo recordaban un buen número de sus alumnos, muchos de los cuales terminaron siendo brillantes matemáticos y profesores. Llevada de su pasión pedagógica, y siempre según estos testimonios, ni siquiera se percataba de que se le desprendía el ordenado moño con que solía recogerse el cabello, ni que le asomaba un pequeño pañuelo que llevaba por dentro de su blusa. Una de sus estudiantes en Estados Unidos, Ruth McKee, subrayó incluso su capacidad para saltar obstáculos sin perder el hilo de su argumentación:

> La señora Noether estaba inmersa en una discusión matemática y todos íbamos alegremente caminando a buen ritmo. Nos acercábamos más y más a la valla... Para aquellos de nosotros con veinte años no sería problema pero, desde mi punto de vista, ¿cómo saltaría la valla esta señora de cincuenta? Cuando nos acercamos a la valla y sin perder una sola palabra de su argumentación, la escaló y saltó sobre las vías del tren.

Grace Shover, otra de las «chicas Noether» en Bryn Mawr, también destacó que le encantaba caminar y hablar de matemáticas sin descanso, ajena a todo lo demás:

> Solía llevar a sus estudiantes de excursión los sábados por la tarde. En esas salidas terminaba tan absorta en su conversación sobre matemáticas que se olvidaba del tráfico y sus estudiantes tenían que estar protegiéndola...

Estos relatos coinciden con el de Natasha Jarny, la esposa de Emil Artin, que recordaba como su marido y Emmy Noether, nada más reencontrarse en Alemania en el verano de 1934, «se pusieron a charlar inmediatamente de matemáticas». Al darse la casualidad de que emplearon términos como *Ideal*, *Führer*, *Gruppe* y *Untergruppe*, que en alemán tienen un doble sentido político y matemático, todo el mundo los miró fijamente y la esposa de Emil Artin se echó a temblar.

> Estaba muerta de miedo. Pensaba: «¡Alguien nos va a detener!». Estábamos en 1934, pero Emmy permanecía completamente ajena a lo que sucedía a su alrededor y hablaba en un tono de voz muy elevado y con gran excitación, cada vez más y más alto.

El propio Emil Artin confesó tener una técnica para intentar aplacar la velocidad a la que Emmy Noether soltaba nuevas ideas: andar más y más rápido, cuanto más, mejor, de modo que perdiera el aliento. Solo entonces era posible conseguir que redujera el ritmo de su charla matemática.

Se sabe también que Emmy Noether vivió de forma sencilla y austera, sin apego por el dinero ni las comodidades. Hasta 1923 no tuvo un salario propiamente dicho, e incluso a partir de entonces sus ingresos fueron modestos. De hecho, gran parte de la herencia

recibida de sus padres la invirtió en sostener a su hermano menor enfermo. Más tarde, en Estados Unidos, comenzó a recibir un salario algo más sustancioso, pero cuando la animaron a disfrutar de una vida más holgada, respondió: «¡Oh, no! ¿Qué te crees? Solo utilizo la mitad de ese dinero, el resto lo guardo para mi sobrino».

Esa despreocupación por sí misma alcanzaba a su aspecto, que la citada Grace Shover describió como «poco convencional, hasta el punto de llegar a atraer la atención. Pero causar tal efecto estaba lejos de sus intenciones. Ella era sincera, sencilla, amable, atenta y considerada». La totalidad de los testimonios de sus amigos y conocidos incidió en esas mismas cualidades, que engrandecían su talla humana. Una vez más, Hermann Weyl fue quien mejor describió la sincera amistad, cálida y sin dobleces, que Emmy Noether prodigaba a todos los que la rodearon:

> Ella misma era, si puedo decirlo, cálida como una hogaza de pan caliente. Irradiaba un amplio y confortable calor vital.

La unanimidad de los testimonios en Alemania y Estados Unidos no deja lugar a dudas de que Emmy Noether fue una persona admirable, una mujer irrepetible y, por derecho propio, una gloria de las matemáticas. Pura y simplemente, Emmy Noether.

Lecturas recomendadas

Bartocci, C.; Betti, R.; Guerraggio, A. y Luchetti, R., *Vite Matematiche, Protagonisti del '900, da Hilbert a Wiles*, Milán, Springer-Verlag Italia, 2007.

Blanco Laserna, D., *Emmy Noether, matemática ideal*, Madrid, Nivola Libros y Ediciones, 2005.

Brewer, J. W. y Smith, M. K., *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work*, Nueva York, Marcel Dekker, 1982.

Dick, A., *Emmy Noether 1882-1935*, Basilea, Birkhäuser, 1981.

Dubreil, P. y Dubreil-Jacotin, M. L., *Lecciones de álgebra moderna*, Barcelona, Editorial Reverte, 1971.

Gómez Bermúdez, C., *Georg Cantor. Sistemas de números y conjuntos*, La Coruña, Universidade da Coruña, 2009.

Lemmermeyer, F. y Roquette, P., *Helmut Hasse and Emmy Noether. Their correspondence 1925-1935*, Gotinga, Universitätsverlag Göttingen, 2006.

Navarro, J., *Mujeres matemáticas: de Hipatia a Emmy Noether*, Barcelona, RBA, 2011.

Padrón, E., *Vida de Emmy Noether*, Madrid, Eila Editores, 2010.

Sánchez Fernández, C., y Giraldo, L., *Dedekind. El arquitecto de los números*, Madrid, Nivola Libros y Ediciones, 2011.

Srinivasan, B., y Sally, J. D., *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Nueva York, Springer-Verlag, 1983.

Temple Bell, E., *Historia de las matemáticas*, Madrid, Fondo de Cultura Económica de España, 2015.

Índice

Academia de Ciencias de Gotinga 130
Alexandroff, Pável 103, 138
álgebra 10, 11, 13, 23, 48, 50, 56, 69, 87, 97, 100, 101, 105-107, 110, 116-121, 147, 149, 150
anillo 10, 11, 13, 97, 101, 105-107, 118-129, 149, 150
  no conmutativo 13, 97, 105, 106, 126, 127
  noetheriano 10, 97, 106, 122, 123, 128, 149
aplicación 43, 44, 75, 76, 78-80, 84, 86, 87, 108, 111, 113
  biyectiva 44-46
  inyectiva 44-46
Artin, Emil 13, 103, 129, 130, 146, 151

Bismarck, Otto von 19, 28, 41
Born, Max 136
Bryn Mawr College 13, 140-142, 144, 148

Cantor, Georg 30, 31, 35, 40, 46, 48-51
cardinal 33, 35, 42, 45, 50
Clebsch, Alfred 55
Círculo Matemático de Palermo 61
Congreso Internacional de Matemáticas 12, 13, 129, 131, 132, 135
condición de cadena ascendente 146
conjuntos 11, 31-40, 42-51, 69, 74, 109, 111, 117, 119, 120, 124, 125, 127
  teoría de 29, 31
conservación de la energía 13, 66, 68, 90, 95, 96, 105
  ley de la 96
  principio de la 68, 90
Courant, Richard 136, 138
cuánticos 58, 59
cuerpo 88, 92-94, 96, 107, 119-121, 149

Dedekind, Richard 30, 107, 124-126
derivada 91, 95, 96
determinante 80, 81, 84, 86, 114, 118
diagonal de Cantor 49-51

discriminante 86, 97, 90

ecuación 68, 90, 94-96, 112, 116-117, 119, 120
  de Euler-Lagrange 94-96
  variacional 68, 90, 94
ecuaciones 65-68, 73, 83
  de campo 65-68
  implícitas 73, 83
Einstein, Albert 9, 19, 67, 69, 90, 95, 96, 132, 137-138, 144, 147, 148
energía 66, 68, 92, 93
  cinética 92, 93
  potencial 92, 93
espacio-tiempo 71
estructura algebraica 11, 29, 59, 60, 62, 105, 107, 116-118, 121

factorización 122, 124, 126
Fischer, Ernst 62, 63, 65
física 66, 68-69 74, 88-91, 95, 96, 147
  newtoniana 89-91, 95, 96
  relativista 68, 95, 96
formas 51, 55-59, 61, 74, 85, 86, 109
  algebraicas 59
  homogéneas 85
fórmula 72, 74, 75, 78, 80, 85, 87, 89-93, 109, 110

Galois, Évariste 8
Gordan, Paul 29, 51, 53, 55-62, 87, 105
grupo de transformaciones 89, 90, 107, 113-115, 117, 118, 120, 121
  de Galileo 89-90, 115, 118, 120
  de Lorentz 90

Hasse, Helmut 103, 131, 147, 149
Hilbert, David 9, 12, 13, 28, 51, 53, 56-58, 60, 62-67, 90, 95, 96, 105, 107, 131, 137, 141, 149

ideales 13, 97, 101, 105-107, 123, 125-128
infinito 46, 48, 50-52, 70, 124
invariantes 51, 53, 55-66, 68-70, 89, 90, 93-97, 105, 114

Kauffman, Ida Amalia 13, 21,
Klein, Felix 9, 12, 13, 28, 53, 60, 63-65, 68, 69, 105, 131, 137, 141
Kronecker, Leopold 28, 30, 31, 33-36, 40, 51, 69
Kummer, Ernst 28, 30, 31, 121, 123-125

lagrangiano 68, 93-96
  de Hilbert-Einstein 68, 95, 96

matemática
  algorítmica 51, 60
  moderna 11, 28, 60, 69
Mathematische Annalen 106, 130, 131
Maxwell, James Clerk 9, 10
método 9-10, 55, 57, 97, 105-107, 149, 150
  axiomático 9, 10, 97, 105-107, 149, 150
  simbólico 55, 57
movimiento rígido 83, 84, 89
Minkowski, Hermann 28

Noether
  Fritz 10, 21, 29, 141, 144, 147
  Max 13, 21, 26, 28, 55, 63, 106
números
  complejos 120, 126
  enteros 23, 34, 37-39, 108, 110, 111, 117, 121, 122, 125, 149
  irracionales 39, 40
  naturales 34-37, 46, 108
  racionales 37, 38, 107, 109
  reales 39, 40, 48, 69, 70, 107, 109, 110, 121

principio de mínima acción 68, 93
Park, Marion Edwards 141
Pell Wheeler, Anna Johnson 141, 142, 146
plano 71-80, 83, 84, 107, 113, 114, 117
polinomio 23, 56, 110-115, 117, 119-121, 126
Princeton 13, 142, 143, 144, 146-148
problema
  de Gordan 87
  variacional 90

recta 36, 38-40, 69-71, 88
rotaciones 81-83, 89, 113, 114, 117, 119, 120

Sociedad Alemana de Matemáticas 61, 62, 149

teorema
  de Gordan sobre la generación finita de invariantes 9, 51, 55-58
  de la base de Hilbert 51
  de Noether 9, 13, 68, 88-96, 105, 149
  fundamental del álgebra 48
teoría de la relatividad 65, 66, 68, 90, 95
  especial 65
  general 65, 66, 68, 90, 95
transformaciones 74-84, 89, 107, 113-115, 117, 118, 120-121
  del espacio 74, 75, 114, 120
  del plano 74, 75, 107
  lineales 75-82, 118
translación 74, 75, 83

Uhlenbeck, Karen 131
Universidad
  Friedrich-Alexander de Erlangen-Núremberg 13, 17-19, 21, 26-28, 52, 60, 61, 63, 106
  de Columbia 147
  de Gotinga 13, 28, 53, 60, 62-66, 68, 77, 99, 105, 136, 137, 141, 146
  de Leipzig 130

variables 51, 55-59, 61, 70, 72-74, 85, 96
velocidad 88-95

Waerden, Bartel Leendert van der 102, 130, 150
Weierstrass, Karl 28, 20, 30, 31, 33, 35, 50
Weyl, Hermann 100, 102, 129, 132, 137, 138, 142, 144, 146, 148, 152
Wiener, Norbert 12, 138